Allgemeine Hinweise zu den Aufgaben:

Zunächst sollte versucht werden, die Aufgaben ausschließlich unter der Verwendung derjenigen Hilfsmittel zu bearbeiten, die auch in Klausuren zugelassen sind, also Formelsammlung und Taschenrechner. Weitere Hilfsmittel (Scripte, Aufzeichnungen, Lehrbuch) sollten erst dann hinzugezogen werden, wenn auch nach längerem Nachdenken kein zielführender Lösungsansatz gefunden werden kann. Der Zeitbedarf pro Aufgabe lieg bei ca. 30 - 90 Minuten.
Der einleitende Text beschreibt einen Sachverhalt und kennzeichnet relevante Größen. Die nachfolgenden Arbeitsaufträge definieren die entsprechende Fragestellung.
Vor einer Lösung der Aufgaben sollte in jedem Fall zunächst der entsprechende Versuchsaufbau skizziert, angemessen beschriftet und verbal der Aufbau und ggf. detaillierter als im einleitenden Text die Durchführung, erwartete Beobachtungen sowie das Versuchsziel beschrieben werden.
Nach der Lösung von Aufgaben, die die Herleitung einer Formel enthalten, sollten geeignete konkrete Werte sinnvoll ausgewählt und eingesetzt werden, um die Größenordnungen abschätzen zu lernen.

Ü-1 (Kräfte im elektrischen Feld)

Zwei auf der Oberfläche elektrisch leitende Tischtennisbälle mit dem Radius r und der Masse m werden jeweils an einem Faden der Länge ℓ so aufgehängt, dass sich ihre Oberflächen gerade berühren. Anschließend wird auf die beiden sich berührenden Kugeln die Ladung Q aufgebracht.

a) Leiten Sie eine Gleichung her, mit der man den sich einstellenden Abstand d zwischen den beiden Oberflächen in Abhängigkeit von der aufgebrachten Ladungsmenge Q bestimmen kann.

b) Stellen Sie graphisch dar, wie der sich einstellende Abstand d von r abhängt, wenn r variiert wird.

Ü-2 (Feldstärkebestimmung im elektrischen Feld)

Zwei aufeinanderliegende planparallele und gleichgroße Metallplatten der Fläche A werden in einem elektrischen Feld E senkrecht zu den Feldlinien angeordnet und anschließend getrennt.

a) Beschreiben Sie die Vorgänge in den sich berührenden Platten.

b) Bestimmen Sie die Ladungsmenge Q, die sich auf jeder Platte befindet, wenn sie innerhalb des Feldes getrennt werden.

c) Bestimmen Sie die Spannung U(d) zwischen den Platten, wenn sie nach der Trennung aus dem elektrischen Feld entfernt und um die Strecke d voneinander getrennt werden.

Ü-3 (Kräfte im magnetischen Feld)

Eine um die Symmetrieachse drehbare quadratische Leiterschleife mit der Kantenlänge a befindet sich in einem homogenen magnetischen Feld der Flussdichte B, der Flächennormalenvektor der Leiterschleife steht dabei senkrecht zu den magnetischen Feldininen.

a) Bestimmen Sie das Drehmoment M, das auf die Leiterschleife wirkt, wenn sie von einem Strom I durchflossen wird.

b) Bestimmen Sie die Spannung U zwischen den (offenen) Enden der Leiterschleife, wenn diese mit einer Frequenz f rotiert.

Ü-4 (Feldstärkebestimmung im magnetischen Feld)

Im Inneren einer gestreckten, einlagigen zylindrischen Spule mit n Windungen, dem Durchmesser d und der Länge ℓ, durch die ein Strom I fließt, entsteht ein angenähert homogenes magnetisches Feld der Flussdichte B.

a) Zeigen Sie, dass man durch Messen der Kraftwirkung auf einen vom Strom I_{mess} durchflossenen geraden Leiter, der mit der Länge s in das Innere der felderzeugenden Spule taucht, die Flussdichte B bestimmen kann.

b) Erläutern Sie, auf welche Weise man auch durch Messen der Induktionsspannung U_{ind} in einer kleineren Spule, die sich im Inneren der felderzeugenden Spule befindet, die Flussdichte B bestimmen kann.

Ü-5 (Halleffekt)

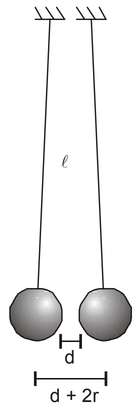
Ein quaderförmiger Leiter wird in Richtung der x-Achse von einem Strom I durchflossen. Der Quader wird von einem Magnetfeld B in Richtung der y-Achse durchsetzt, dabei entsteht zwischen den beiden Punkten A und B an den gegenüberliegenden Außenflächen in z-Richtung die Hall-Spannung U_H. Diese hängt ab von der sogenannten Hall-Konstanten R_H mit $[R_H] = 1\ m^3/C$.

a) Begründen Sie das Zustandekommen der Hall-Spannung U_H und erläutern Sie die Bedeutung von R_H.

b) Leiten Sie eine Beziehung her, die es erlaubt, U_H zu berechnen, wenn neben den Abmessungen des Leiters die Größen B, I und R_H bekannt sind.

c) Für Kupfer beträgt die Hall-Konstante $R_H = -5{,}5 \cdot 10^{-11}\ m^3/C$. Berechnen Sie für eine Kupferfolie mit einer Dicke von $d = 25\ \mu m$ die maximal mögliche Hallspannung, die auf Grund des magnetischen Feldes der Erde ($B = 70\ \mu T$) entsteht, wenn durch die Folie der Strom $I = 5\ A$ fließt.

d) Begründen Sie, warum man zur Magnetfeldmessung Hall-Elemente verwendet, die aus dotiertem Silizium statt aus Metall bestehen.



Lsg. Ü-1

Versuchsziel: Bestimmung der Kraftwirkung zwischen zwei geladenen Körpern

Aufbau: siehe einleitender Text zur Aufgabenstellung

Skizze: siehe Abbildung rechts

Durchführung: Um die beiden Kugeln aufzuladen, muss ein geeigneter metallischer Körper zuvor an einer Ladungsquelle aufgeladen werden. Anschließend wird er von unten an die beiden Kugeln herangeführt, wobei es genügt, eine der beiden Kugeln zu berühren, um die Ladung zu übertragen.

a) Da die beiden Kugeln gleich groß sind und sich berühren, wird die aufgebrachte Ladungsmenge Q sich gleichmäßig auf beide Kugeln verteilen. Somit beträgt die Ladung jeder einzelnen Kugel $Q_1 = Q_2 = Q / 2$. Da beide Ladungen das gleiche Vorzeichen besitzen, tritt eine abstoßende Kraft F_C auf, die die beiden Kugel seitlich auslenkt. Die Aufhängung in Form eines Pendels führt dabei zu einer rückstellenden Gegenkraft F_r, die vom Winkel φ der Auslenkung, der Gewichtskraft F_g der Kugeln und der Fadenlänge ℓ abhängt. Das System ist im Gleichgewicht, wenn die beiden Kräfte F_C und F_r gleich groß sind, es gilt dann:

$$F_C = F_r \tag{1.1}$$

Die Kraft F_C ergibt sich nach dem Coulombschen Gesetz zu

$$F_C = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1\cdot Q_2}{r_M^2} \qquad \text{mit} \qquad r_M = 2\cdot r + d \tag{1.2}$$

Die rückstellende Kraft F_r ist die Tangentialkomponente des Kräfteparallelograms, das sich aus F_r, F_g und der den Faden spannenden Kraft F_f zusammensetzt. Die Auslenkung aus der Ruhelage ist dabei die Hälfte des Abstandes der Kugeloberflächen, folglich gilt:

$$F_r = F_g\cdot\sin(\varphi) = F_g\cdot\sin\left(\arctan\left(\frac{d}{2\cdot\ell}\right)\right) \approx F_g\cdot\frac{d}{2\cdot\ell} \tag{1.3}$$

Die Näherung darf verwendet werden, wenn die Auslenkung d / 2 hinreichend klein gegenüber ℓ ist, wovon hier ausgegangen werden darf.

Einsetzen von (1.3) und (1.2) in (1.1) ergibt

$$\frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1\cdot Q_2}{(2r+d)^2} + F_g\cdot\frac{d}{2\cdot\ell} = 0 \tag{1.4}$$

Diese Gleichung muss nach d aufgelöst werden, mit $F_g = m\cdot g$ erhält man

$$\frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1\cdot Q_2}{(2r+d)^2} = m\cdot g\cdot\frac{d}{2\cdot\ell} \qquad \left|\cdot\frac{2\cdot\ell\cdot(2r+d)^2}{m\cdot g}\right. \tag{1.5}$$

$$\frac{2\cdot\ell}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1\cdot Q_2}{m\cdot g} = d\cdot(2r+d)^2 = d\cdot(4r^2+4rd+d^2) \qquad |-(RS) \tag{1.6}$$

$$4dr^2 + 4rd^2 + d^3 - \frac{\ell}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1\cdot Q_2}{m\cdot g} = 0 \tag{1.7}$$

Eine exakte Lösung dieser Wurzel 3. Ordnung mit der Cardanischen Formel ist sehr aufwändig. Wenn d << r, kann aber d^3 gegenüber den übrigen Potenzen von d vernachlässigt werden. Damit ergibt sich für d eine quadratische Gleichung mit den Lösungen

$$d^2 + dr - \frac{\ell}{8\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot r}\cdot\frac{Q_1\cdot Q_2}{m\cdot g} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad d_{1,2} = -\frac{r}{2}\pm\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{\ell}{8\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot r\cdot m\cdot g}\cdot Q_1\cdot Q_2}$$

Beispielrechnung: r = 0,016 m; ℓ = 1 m; Q = 1 nC; m = 0,0025 kg

d_1 = 0,0006863 m; d_2 = -0,0166863 m

Die zweite Lösung ist negativ und daher zu verwerfen. Damit ergibt sich ein Oberflächenabstand von 0,6863 mm.

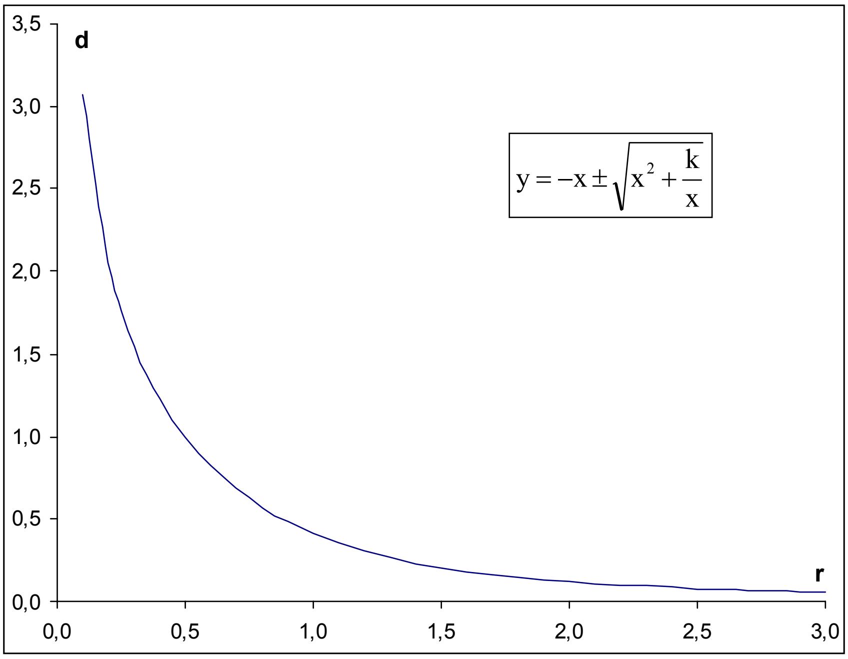
Eine iterative (graphische) Lösung, bei der man jeweils die Kräfte F_r und F_C in Abhängigkeit von d darstellt und den Schnittpunkt der beiden Graphen bestimmt, ergibt den genaueren Wert von 0,6861 mm, der also nur geringfügig von der Näherungslösung abweicht.

b) Die Funktion d(r) hat nach der Näherungslösung aus a) die allgemeine Form

$$y = -x \pm \sqrt{x^2 + \frac{k}{x}}$$

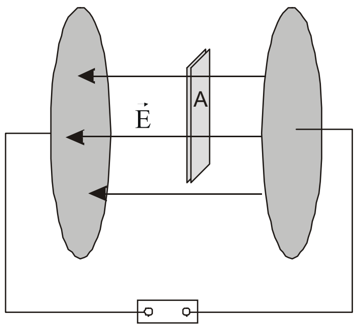
Da der Wurzelterm immer größer ist als der erste Summand x, sind alle Lösungen mit dem negativen Vorzeichen vor der Wurzel negativ und somit in diesem Fall zu verwerfen.

Für ein positives Vorzeichen vor der Wurzel ergibt sich mit k = 1 und $x \in \left]0;\ 3\right]$ folgender Graph:



Man erkennt deutlich, dass mit zunehmendem Radius r der Abstand d sich asymptotisch der r-Achse nähert, bei kleinem r dagegen jedoch sehr schnell ansteigt. Auch hier zeigt sich, dass die verwendete Näherung nur für d << r zuverlässige Werte liefern wird.

Lsg. Ü-2



Versuchsziel: Bestimmung der elektrischen Feldstärke durch Messung der Influenzspannung

Aufbau: Zur Erzeugung des elektrischen Feldes kann ein Plattenpaar benutzt werden. Das zu Messzwecken dienende kleiner Plattenpaar wird in den felderfüllten Raum zwischen den Kondensatorplatten eingebracht.

Skizze: siehe Abbildung rechts

Durchführung: Die beiden planparallenle, sich berührenden Platten werden mit dem Flächennormalenvektor senkrecht zu den Feldininen eingebracht und anschließend getrennt. Nach dem Entfernen der beiden Platten kann die Ladungsmenge auf einer der Platten mit einem Ladungsmessgerät oder bei einem definierten Plattenabstand die Spannung zwischen den beiden Platten mit einem statischen Voltmeter bestimmt werden. Bei bekannter Plattengröße und Plattenabstand kann aus den Messwerten jeweils auf die elektrische Feldstärke geschlossen werden.

a) Im elektrischen Feld wirken auf die frei beweglichen Ladungen in den beiden elektrisch leitenden Platten elektrostatische Kräfte, die dazu führen, dass sich entgegengesetzte Ladungen auf den beiden Plattenaußenseiten sammeln (Influenz). Insgesamt bleiben die beiden Platten jedoch elektrisch so lange neutral, wie sie sich berühren. Die Flächenladungsdichte σ auf den beiden Oberflächen wird dabei durch die elektrische Feldstärke E bestimmt, die Ladungsmenge Q durch die Plattengröße A.

b) Die Ladung Q wird bestimmt durch die Flächenladungsdichte σ und die Plattenfläche A. Es gilt:

$$Q = \sigma \cdot A \qquad (2.1)$$

Für die Flächenladungsdichte gilt die Beziehung

$$\sigma = \varepsilon_0 \cdot E \tag{2.2}$$

somit erhält man

$$Q = \varepsilon_0 \cdot E \cdot A \tag{2.3}$$

Dies ist gleichzeitig die auf den einzelnen Platten verbleibende Ladung nach Trennung der beiden Plattenflächen, da die Ladungen nicht zurückfließen können. Da die Ladungen entgegengesetzte Vorzeichen haben, sind sie nach wie vor in der Summe elektrisch neutral, aber die Ladungsmenge einer einzelnen Platte lässt sich nun mit einem Ladungsmessgerät bestimmen. Auflösen von Glg. (2.3) nach E ergibt somit für die elektrische Feldstärke

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 \cdot A} \tag{2.4}$$

c) Wenn die beiden Platten getrennt werden, wird an den Ladungen Arbeit verrichtet, somit entsteht zwischen den Platten eine Spannung. Außerhalb des elektrischen Feldes, in dem die Platten getrennt werden, sammeln sich die Ladungen nun auf den einander zugewandten Seiten der Platten, es ergibt sich die gleiche Flächenladungsdichte wie zuvor. Damit ist nach Glg. (2.4) die elektrische Feldstärke zwischen den beiden Platten genauso groß wie die ursprüngliche Feldstärke, die die Influenz ausgelöst hat. Zwischen der Spannung U und der elektrischen Feldstärke E besteht die Beziehung

$$E = \frac{U}{d} \tag{2.5}$$

somit kann aus der Messung der Spannung U zwischen den Platten bei bekanntem Plattenabstand d ebenfalls wieder die elektrische Feldstärke E bestimmt werden.

Beispielrechnung: A = (0,05 m)²; Q = 1 pC

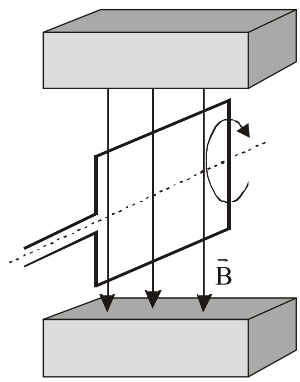
Nach Glg. (2.4) ergibt sich

$$E = \frac{1 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{A \cdot s}}{8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{A \cdot s}}{\mathrm{V \cdot m}} \cdot (0{,}05\mathrm{m})^2} = 45{,}2\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

Werden die Platten um die Strecke d = 0,05 m getrennt, entsteht zwischen den beiden Platten die Spannung

$$U = d \cdot E = 0{,}05\mathrm{m} \cdot 45{,}2\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = 2{,}26\mathrm{V}$$

Lsg. Ü-3



Versuchsziel: Bestimmung der Kraftwirkung auf Ladungen in einem Magnetfeld

Aufbau: siehe einleitender Text zur Aufgabenstellung

Skizze: siehe Abbildung rechts

Durchführung: Eine rechteckige, um ihre Symmetrieachse drehbare Leiterschleife wird in das homogene magnetische Feld zwischen den Polschuhen eines Magneten gebracht. Im ersten Fall wird durch die Leiterschleife ein Strom geleitet und die Kraft bestimmt, die auf die Leiterschleife wirkt und sie in Rotation versetzt. Im zweiten Fall wird an die beiden Enden der Leiterschleife z.B. ein Oszilloskop als Spannungsmessgerät angeschlossen und die Leiterschleife in Rotation versetzt. Die dabei entstehende Spannung wird gemessen.

a) Das Drehmoment ist definiert als das Kreuzprodukt

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r} \tag{3.1}$$

Unter Berücksichtigung des Winkels φ zwischen der Flächennormale und der Richtung des magnetischen Feldes gilt:

$$M = F \cdot r \cdot \sin(\varphi) \tag{3.2}$$

In der Anfangsposition der Leiterschleife ist der Winkel φ = 0°, folglich gilt hier

$$M = F \cdot r \qquad (3.3)$$

Die Kraft F wird durch die Lorentzkraft auf die bewegten Ladungen im Inneren des Leiters erzeugt. Für ein Leiterstück der Länge ℓ, das von einem Strom I durchflossen wird und sich in einem magnetischen Feld B befindet, gilt:

$$F = I \cdot \ell \cdot B \qquad (3.4)$$

Zum Drehmoment tragen nur die beiden Leiterstücke bei, die die Feldlinien schneiden, die parallel zu den Feldlinien verlaufenden Leiterstücke erzeugen kein eigenes Drehmoment. Der Abstand der beiden Leiterstücke von der Drehachse ist r = a / 2, somit gilt mit $\ell = a$

$$M = 2 \cdot I \cdot a \cdot B \cdot \frac{a}{2} = I \cdot a^2 \cdot B \qquad (3.5)$$

Das Drehmoment wird also durch die von der Leiterschleife umschlossenen Fläche $A = a^2$, dem Strom I und der Flussdichte B bestimmt.

b) Bei einer offenen Leiterschleife, die im magnetischen Feld B rotiert, wirkt auf die Elektronen die Lorentzkraft F_L. Diese steht senkrecht zur magnetischen Feldrichtung und dem Vektor v der Geschwindigkeit, mit dem sich die Leiterschleife im Magnetfeld bewegt. Es gilt:

$$\vec{F}_L = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \qquad (3.6)$$

Diese Kraft führt zu einer Verschiebung der Ladungsträger in Richtung des Leiters. Da sich bei einer Rotation der Winkel zwischen v und B ständig ändert, erhält man für den Betrag von FL

$$F_L = q \cdot v \cdot B \cdot \sin(\varphi) \qquad (3.7)$$

Durch die Ladungsträgerverschiebung entsteht zwischen den Enden des Leiters ein elektrisches Feld, das auf die Elektronen einen Gegenkraft ausübt. Für diese gilt:

$$F_{El} = q \cdot E = q \cdot \frac{U}{d} \qquad (3.8)$$

Mit $d = \ell$ erhält man aus der Gleichgewichtsbedingung für die beiden Kräfte aus Glg. (3.7) und (3.8)

$$F_L = F_{El} \qquad \Rightarrow \qquad q \cdot v \cdot B \cdot \sin(\varphi) = q \cdot \frac{U}{\ell} \qquad (3.9)$$

Aufgelöst nach U ergibt sich

$$U = \ell \cdot v \cdot B \cdot \sin(\varphi) \qquad (3.10)$$

Rotiert die Leiterschleife mit der konstanten Frequenz f, so ergibt sich die Geschwindigkeit v als Tangentialgeschwindigkeit zu

$$v = 2 \cdot \pi \cdot \frac{a}{2} \cdot f \qquad (3.11)$$

Für den Winkel φ erhält man entsprechend

$$\varphi = \varphi(t) = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t \qquad (3.12)$$

Einsetzen von (3.12) und (3.11) in (3.10) ergibt somit unter Berücksichtigung, dass die an den beiden beiden Leiterstücken entstehenden Teilspannungen zu addieren sind, den zeitabhängigen Verlauf für U = U(t)

$$U(t) = \ell \cdot a \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot B \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \qquad (3.13)$$

Beispielrechnung: a = 0,1 m; I = 5 A; B = 0,5 T; f = 50 Hz

Das Anfangsdrehmoment beträgt nach (3.5)

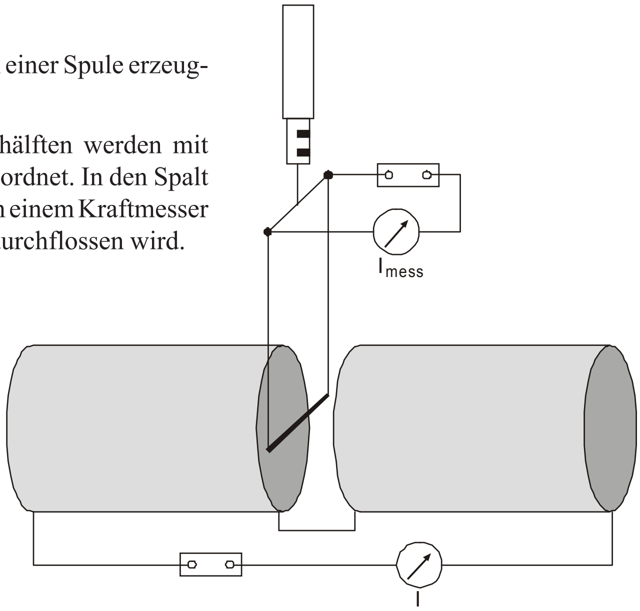
$$M = 5A \cdot (0{,}1m)^2 \cdot 0{,}5 \frac{V \cdot s}{m^2} = 0{,}025 VAs = 0{,}025 Nm$$

Die in der Leiterschleife induzierte Spannung beträgt nach (3.13) mit ω = 2 · π · f

$$U(t) = 0{,}1m \cdot 0{,}1m \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 \frac{1}{s} \cdot 0{,}5 \frac{V \cdot s}{m^2} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) = 1{,}57\ V \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

hat also einen sinusförmigen Verlauf mit der Frequenz f, wobei während einer vollständigen Umdrehung die Spannung Werte zwischen -1,57 V und +1,57 V annimmt.

Lsg. Ü-4



Versuchsziel: Bestimmung der Flussdichte B eines von einer Spule erzeugten magnetischen Feldes

Aufbau: Zwei gleich lange zylindrische Spulenhälften werden mit einem kleinen Spalt hintereinander angeordnet. In den Spalt taucht ein Leiterstück der Länge s, dass an einem Kraftmesser befestigt ist und von einem Strom I_{mess} durchflossen wird.

Skizze: siehe Abbildung rechts

Durchführung: Fließt ein Strom I durch die beiden in Reihe geschalteten Spulenhälften, wirkt auf das Leiterstück eine Kraft F, die mit dem Kraftmesser gemessen werden kann. Die Kraft F ist dabei proportional zum Spulenstrom, wie man durch Variation des Spulenstroms zeigen kann. Außerdem ist die Krfat F proportional zum Messstrom Imess durch das Leiterstück, was durch eine analoge Messreihe gezeigt werden kann.

a) Für die Kraftwirkung auf einen geraden Leiter der Länge s, der sich in einem magnetischen Feld der Flussdichte B befindet und von einem Strom I_{mess} durchflossen wird, gilt unter der (hier gegebenen) Voraussetzung, dass der Leiter senkrecht zu den Feldlinien ausgerichtet ist:

$$F = I_{mess} \cdot s \cdot B \qquad (4.1)$$

Da I_{mess} und s bekannt sind, lässt sich B aus der gemessenen Kraft F berechnen zu

$$B = \frac{F}{I_{mess} \cdot s} \qquad (4.2)$$

b) In einer Leiterschleife wird nach dem Induktionsgesetz eine Spannung induziert, wenn sich die vom magnetischen Feld durchsetzte Fläche A der Leiterschleife oder die Flussdichte B ändert. Es gilt:

$$U_{ind} = \frac{d}{dt}(A \cdot B) \qquad (4.3)$$

Da sich die kleinere Spule innerhalb der Zylinderspule befindet, gibt es folglich zwei Möglichkeiten, eine Induktionsspannung entstehen zu lassen:

1. Man lässt die kleine Spule mit einer definierten Frequenz rotieren und misst die entstehende Spannung U_{ind}.
2. Man ändert definiert den Strom durch die Zylinderspule und damit die von ihr erzeugte magnetische Flussdichte und bestimmt wiederum die in der Spule entstehende Induktionsspannung U_{ind}.

Da Möglichkeit 1 bereits in Ü-3 erfasst ist, soll hier die 2. Möglichkeit näher beschrieben werden.

Die kleine Spule (im Folgenden als Messspule bezeichnet) habe n Windungen. Jede dieser Windungen umschließt die gleiche Fläche A, somit ist die Gesamtfläche der Spule $A_n = n \cdot A$. Nach Gleichung (4.3) ergibt sich damit für die Induktionsspannung U_{ind} in der Messspule

$$U_{ind} = \frac{d}{dt}(n \cdot A \cdot B) \qquad (4.4)$$

Da die Spule nicht bewegt wird, ist A zeitlich konstant, und Glg. (4.4) reduziert sich auf

$$U_{ind} = n \cdot A \cdot \frac{d}{dt} B = n \cdot A \cdot \dot{B} \qquad (4.5)$$

Wenn der Spulenstrom I und damit die Flussdichte B von I = 0 an zeitlich linear ansteigt, entsteht in der Messspule eine konstante Spannung U_{ind}. Wenn das Zeitintervall $\Delta t = t_1 - t_0$ bekannt ist, ergibt sich

$$U_{ind} = n \cdot A \cdot \frac{B(t_1) - B(t_0)}{t_1 - t_0} = n \cdot A \cdot \frac{B(t_1)}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad B(t_1) = \frac{U_{ind} \cdot \Delta t}{n \cdot A} \qquad (4.6)$$

Da alle Größen auf der rechten Seite der Gleichung bekannt sind oder gemessen werden können, kann man also daraus auf die gesuchte Flussdichte B zum Zeitpunkt t_1 zurückschließen.

Beispielrechnung: s = 0,05m; I_{mess} = 5 A; F = 35 mN

Nach Glg. (4.2) ergibt sich die für die mit dem Leiterstück gemessene Flussdichte

$$B = \frac{35 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N}}{5\mathrm{A} \cdot 0{,}05\mathrm{m}} = 0{,}14\mathrm{T}$$

n = 50; Δt = 10 s; A = (0,05m)²

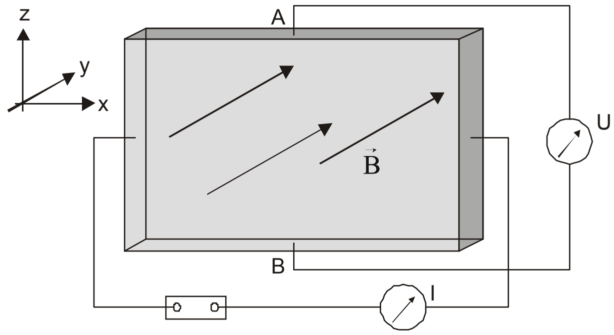
Variiert man den Spulenstrom von 0 bis zu dem Wert, der im obigen Beispiel die Flussdichte von 0,14 T erzeugt, entsteht in der Messspule nach Glg. (4.6) für das Zeitintervall Δt die Spannung

$$U_{ind} = 50 \cdot (0{,}05\mathrm{m})^2 \cdot \frac{0{,}14\mathrm{T}}{10\mathrm{s}} = 1{,}75\,\mathrm{mV}$$

Lsg. Ü-5

Versuchsziel: Bestimmung der Hall-Spannung eins stromdurchflossenen Leiters im magnetischen Feld

Aufbau: Eine dünne Metallfolie wird in ihrer Längsrichtung von einem Strom I durchflossen. Zwischen den Mittelpunkten der beiden Schmalseiten der Seitenflächen wird ein Spannungsmessgerät angeschlossen. Die Metallfolie wird in ein magnetisches Feld der Flussdichte B verbracht, dessen Feldlinien die Folie senkrecht durchsetzen.



Skizze: siehe Abbildung rechts

Durchführung: Bei Variation des Stromes, des Magnetfeldes oder des Folienmaterials wird die sich jeweils einstellende Spannung gemessen.

a) Durch den Strom I findet ein Ladungsträgertransport durch den Querschnitt des Leiters statt, dabei bewegen sich die Ladungsträger mit einer Geschwindigkeit v. Auf Grund der Lorenztkraft im magnetischen Feld der Flussdichte B wirkt auf diese Ladungsträger eine Kraft F_L senkrecht zu v und zu B, hier also parallel zur z-Achse. Die dabei entstehende Ladungsverschiebung bewirkt zwischen den Punkten A und B das Auftreten einer Spannung, die von außen gemessen werden kann. Gleichzeitig entsteht ein elektrisches Feld, dessen Kraftwirkung F_E der Lorentkraft entgegenwirkt. Es bildet sich ein Gleichgewichtszustand aus.

Die zwischen den Punkten A und B entstehende Spannung wird Hall-Spannung genannt. Für die beiden Kräfte gelten die Beziehungen

$$F_L = q \cdot v \cdot B \qquad (5.1)$$

$$F_E = q \cdot E \qquad (5.2)$$

Im Gleichgewichtszustand sind diese beiden Kräfte gleich groß, also gilt

$$q \cdot v \cdot B = q \cdot E \Rightarrow E = v \cdot B \qquad (5.3)$$

Die Entfernung zwischen den beiden Punkten A und B sei b, dann ergibt sich die Hall-Spannung U_H daraus zu

$$E = \frac{U_H}{b} \Rightarrow U_H = b \cdot E = b \cdot v \cdot B \qquad (5.4)$$

b) Die Geschwindigkeit, mit der sich die Ladungsträger bewegen, hängt von der Anzahl der Ladungsträger pro Volumeneinheit ab. Je größer die Anzahl der im Volumen vorhandenen Ladungsträger ist, desto geringer ist bei einem gegebenen Strom I die Geschwindigkeit v jedes einzelnen Ladungsträgers. Die Ladung Q ergibt sich aus n Ladungsträgern der Ladung q, Die Anzahl der Ladungsträger pro Volumeneinheit V bezeichnet man als Ladunsträgerdichte N. Es gilt

$$N = \frac{n}{V} \qquad (5.5)$$

Der Strom I ist definiert als

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \qquad (5.6)$$

dabei ergibt sich die Ladung ΔQ zu

$$\Delta Q = N \cdot V \cdot q \qquad (5.7)$$

Bezeichnet man die Abmessungen des Quaders mit ℓ in Richtung der x-Achse, d in Richtung der y-Achse und b in Richtung der z-Achse, so ist das Volumen $V = \ell \cdot d \cdot b$. Damit ergibt sich aus den Glg. (5.6) und (5.7)

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{N \cdot V \cdot q}{\Delta t} = \frac{N \cdot \ell \cdot d \cdot b \cdot q}{\Delta t} \qquad (5.8)$$

Da die Bewegung der Ladungsträger in Richtung der x-Achse erfolgt, beschreibt der Quotient $\ell / \Delta t$ die Geschwindigkeit v, mit der sie sich bewegen. Man erhält somit

$$I = N \cdot v \cdot d \cdot b \cdot q \qquad (5.9)$$

Aufgelöst nach v erhält man die sogenannte Driftgeschwindigkeit der Ladungsträger

$$v = \frac{I}{N \cdot d \cdot b \cdot q} \qquad (5.10)$$

Einsetzen von (5.10) in Glg. (5.4) ergibt für die Hall-Spannung

$$U_H = \frac{b \cdot B \cdot I}{N \cdot d \cdot b \cdot q} = \frac{B \cdot I}{N \cdot d \cdot q} = \frac{1}{N \cdot q} \cdot \frac{B \cdot I}{d} \qquad (5.11)$$

Der erste Faktor ist eine Materialkonstante, diese wird als Hall-Konstante bezeichnet und ist definiert als

$$R_H = \frac{1}{N \cdot q} \quad \text{mit} \quad [R_H] = \frac{1}{\frac{1}{m^3} \cdot 1C} = 1\frac{m^3}{C} \qquad (5.12)$$

Damit ergibt sich für die Hall-Spannung U_H der Ausdruck

$$U_H = R_H \cdot \frac{B \cdot I}{d} \qquad (5.13)$$

Die Hall-Spannung wird als umso größer, je kleiner die Dicke d des Quaders ist, deshalb müssen möglichst dünne Folien verwendet werden. Länge und Breite des Quaders spielen dagegen für die Hall-Spannung keine Rolle, begrenzen aber den maximal zulässigen Strom durch das Hall-Element.

c) Mit den angegebenen Daten erhält man nach Glg. (5.13) die Hall-Spannung

$$U_H = -5{,}5 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{A \cdot s} \cdot \frac{70 \cdot 10^{-6} \frac{V \cdot s}{m^2} \cdot 5A}{25 \cdot 10^{-6} m} = -7{,}7 \cdot 10^{-10} V = -0{,}77 nV$$

Das Ergebnis zeigt deutlich, dass die bei Metallen auftretenden Hall-Spannungen sehr gering sind und nur bei hohen magnetischen Flussdichten zu messbaren Ergebnissen führen.

d) Glg. (5.13) kann man entnehmen, dass R_H wird umso größer wird, je geringer die Ladungsträgerdichte N ist. Während diese bei Metallen sehr hoch ist, was zu einer geringen Hall-Spannung führt, ist sie bei Halbleitern je nach Dotierung um mehrere Zehnerpotenzen geringer. Deshalb erzeugen Hall-Elemente aus Halbleitern erheblich größere Hall-Spannungen.

Beispielrechnung: Halbleiter-Hall-Element (Indium-Arsenid): R_H = 10-4 m³/C; d = 10 µm; I = 0,1 A

Hier ergibt sich für das magnetische Feld der Erde eine Hall-Spannung

$$U_H = -1 \cdot 10^{-4} \frac{m^3}{A \cdot s} \cdot \frac{70 \cdot 10^{-6} \frac{V \cdot s}{m^2} \cdot 0{,}1A}{10 \cdot 10^{-6} m} = -7{,}0 \cdot 10^{-5} V = -70 \mu V$$

liegt also trotz des erheblich kleineren messtroms um 5 Zehnerpotenzen höher als die in c) entstehende Spannung.