Relativität von Bezugssystemen und ihre Folgerungen

Inhaltsverzeichnis

Inertialsysteme - Die Galilei-Transformation 3

Relativität von Bezugssystemen 4

Gleichzeitigkeit 5

Die Transformation der Zeit (Zeitdilatation) 6

Die Transformation von Strecken (Längenkontraktion) 7

Myonen-Zerfall 7

Relativistische Massenzunahme 8

Relativistische Energie einer bewegten Masse 9

Der Doppler-Effekt 10

Additionstheorem für relativistische Geschwindgkeiten 11

Die Lichtuhr im Minkowski-Diagramm 12

Energie und Impuls 13

Anwendungsbeispiele 15

Inertialsysteme - Die Galilei-Transformation

Jedes Ereignis findet statt in Raum und Zeit. Der Ortsvektor $\vec{s}$ und die Zeit t bilden ein Bezugssystem B($\vec{s}$,t), das die raumzeitliche Lage des Ereignisses beschreibt.
Ein Bezugssystem heißt Inertialsystem, wenn in ihm das Galileische Trägheitsgesetz gilt:

> „Solange keine äußeren Kräfte auf einen Körper einwirken, befindet er sich in der Ruhelage oder im Zustand der gleichförmigen Bewegung.“

(Man beachte, dass dies zum Beispiel auch für ein rotierendes Bezugssystem gilt, nur bewegt sich hier ein sich selbst überlassener Körper nicht auf einer Geraden!)
Der Übergang von einem Inertialsystem in ein anderes erfolgt mit Hilfe der *Galilei-Transformation*.
Für den Übergang von einem Bezugssystem B'($\vec{s}$',t') nach B($\vec{s}$,t) gilt:

$$\vec{s} = \vec{s}\,' - \vec{v} \cdot t' \qquad \text{und} \qquad t = t'$$

dabei ist $\vec{v}$ die konstante (!) Relativgeschwindigkeit zwischen B und B'. In der klassischen Mechanik hat v keine obere Grenze.
In einem kartesischen Koordinatensystem ergeben sich für eine Bewegung des Systems B' mit der Geschwindigkeit v längs der X-Achse des Systems B somit die Transformationsgleichungen

$$x = x' + v \cdot t$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$t = t'$$

$$\text{wobei gilt: } \vec{s} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Das nebenstehende Diagramm zeigt dieses Bezugssystem B', das sich mit der Geschwindigkeit v in X-Richtung bezüglich des Bezugssystems B bewegt.
Ruht der Punkt P_1 im System B', so bewegt er sich im System B mit der Geschwindigkeit v in X-Richtung. Seine kinetische Energie bezüglich B bestimmt sich aus der Geschwindigkeit v, die er bezüglich B hat. Aus der Transformationsgleichung für x ergibt sich also:

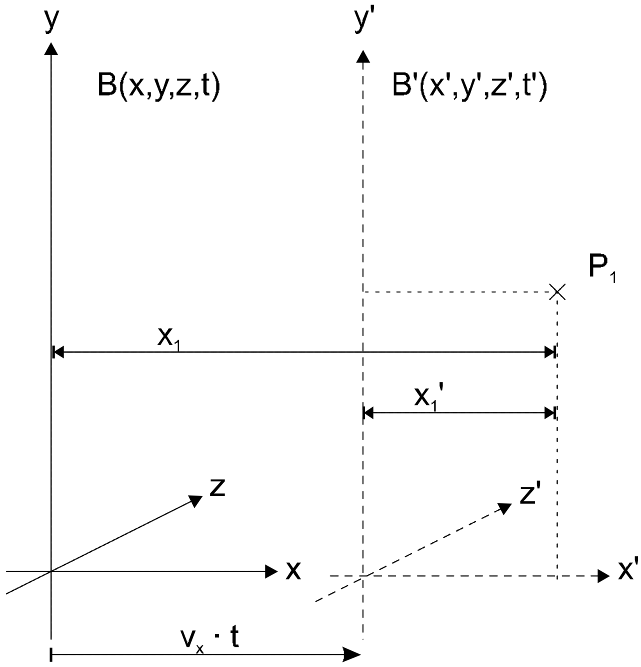
$$s(t) = x_1 = x_1' + v \cdot t$$

Die Geschwindigkeit ergibt sich aus der ersten Ableitung von s(t) nach der Zeit zu

$$\dot{s}(t) = v$$

Die kinetische Energie beträgt folglich

$$W_{kin} = \tfrac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$



Bewegt sich der Punkt P_1 im System B' mit der Geschwindigkeit v', so gilt für s'(t) die Beziehung

$$s'(t) = x' = x_1' + v' \cdot t$$

Durch Einsetzen in die Transformationsgleichung erhält man

$$s(t) = x = x' + v \cdot t = (x_1' + v' \cdot t) + v \cdot t = x_1' + (v' + v) \cdot t$$

Bestimmt man die Geschwindigkeit v_B des Punktes P_1 im System B durch Ableitung von s(t) nach der Zeit (erlaubt wegen t = t'), so erhält man

$$\dot{s}(t) = (v' + v) \cdot t = v_B \cdot t$$

Die kinetische Energie einer Masse im Punkt P_1 bezüglich einer in B ruhenden Masse ergibt sich also zu

$$W_{kin} = \tfrac{1}{2} \cdot m \cdot v_B^2 = \tfrac{1}{2} \cdot m \cdot (v' + v)^2$$

Relativität von Bezugssystemen

Die Galilei-Tranformation gilt nur für Bezugssysteme, deren Relativgeschwindigkeit v sehr klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit c ist. Zu Galileis Zeiten spielt das keine Rolle, weil im Rahmen der damals durchführbaren Experimente keine so großen Geschwindigkeiten auftraten. Erst Ende des letzten Jahrhunderts begannen die Physiker, an Experimenten zu arbeiten, bei denen die Lichtgeschwindigekeit eine zentrale Rolle spielte (1887: Experiment von Michelson und Morley zur Untersuchung des „Ätherwindes“). Es kistallisierte sich heraus, dass die von Maxwell über seine Feldtheorie über elektromagnetische Wellen aus physikalischen Konstanten berechenbare Lichtgeschwindigkeit eine sogenannte *Invariante* ist, das heißt, beim Übergang von einem Bezugssystem in ein anderes ändert sich ihre Größe nicht. Bereits Lorentz (1895) kommt das Verdienst zu, noch vor Einstein eine Transformation entwickelt zu haben, die diese Invariante berücksichtigt und anders als die Galilei-Transformation auch bei Relativgeschwindigkeiten v nahe bei c ihre Gültigkeit behalten (-> Lorentz-Transformation). Einsteins Verdienst (1905) besteht im wesentlichen darin, alle zum damaligen Zeitpunkt bekannten isolierten Erkenntnisse in einer geschlossenen Theorie zu vereinigen und daraus weitere nachprüfbare Voraussagen abzuleiten, die überwiegend erst in der nachfolgenden Zeit durch Experimente verifiziert werden konnten (z. B. die scheinbare Verlängerung der Lebendauer von Myonen).

Das Kernstück von Einsteins *spezieller Relativitästheorie* ist das *Relativitätsprinzip:*

„Es ist unmöglich, auf Grund irgendwelcher physikalischer Erscheinungen ein absolutes Bezugssystem zu bestimmen.“

Daraus ergeben sich die folgenden drei wichtigen Folgerungen:

1. Es gibt keine Möglichkeit, die absolute Geschwindigkeit zu messen.
2. Die Lichtgeschwindigkeit c ist unabhängig von der Bewegung der Lichtquelle, das heißt, c ist in allen Inertialsystemen konstant.
3. Die Lichtgeschwindigkeit c ist endlich und die größtmögliche Geschwindigkeit.

Um der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit Rechnung zu tragen, muss statt der Galilei-Transformation die Lorentztransformation verwendet werden, wenn man von einem Bezugssystem B in ein anderes Bezugssystem B’ wechselt:

$$\vec{s}^2 - c^2 \cdot t^2 = \vec{s}'^2 - c^2 \cdot t'^2$$

Für eine geradlinige Bewegung in X-Richtung mit konstanter Geschwindigkeit v gilt dann:

$$x' = \frac{x - v \cdot t}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{v \cdot x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

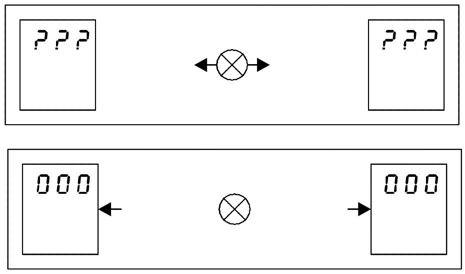
Für v << c gehen diese Gleichungen in die Galilei-Transformation über.

Diese Gleichungen erscheinen auf den ersten Blick sehr kompliziert. Zu ihrer Veranschaulichung soll das Prinzip, nach dem Lorentz sie hergeleitet hat, an einigen Beispielen verdeutlicht werden.

Gleichzeitigkeit

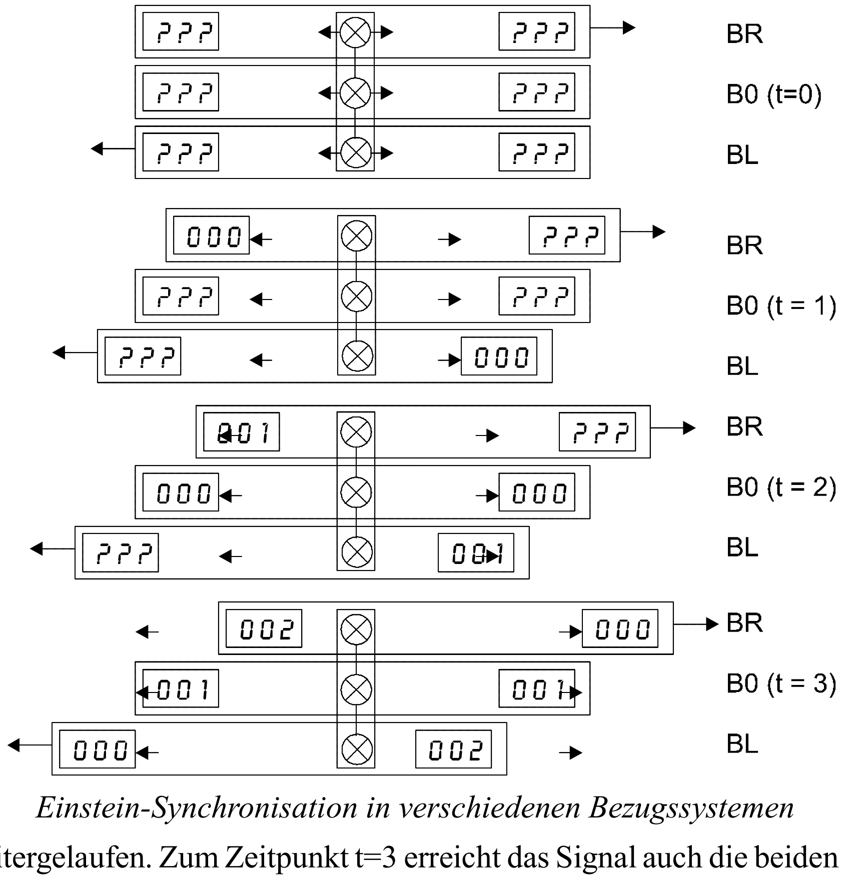
Die Zeitabhängigkeit der Transformation von Raumkoordinaten hat zur Folge, dass zwei Ereignisse, die an verschiedenen Orten stattfinden, in einem Inertialsystem als gleichzeitig, in einem anderen dazu bewegten Inertialsystem dagegen als nicht gleichzeitig angesehen werden. Der Begriff der Gleichzeitigkeit ist damit *relativ*.

Ob zwei Ereignisse gleichzeitig stattfinden, kann über den Vergleich von Uhren erfolgen, die zu einem bestimmten Zeitpunkt gestartet (auf 0 gesetzt) werden und von denen bekannt ist, dass sie im gleichen Takt laufen.
Einstein verwendet zum gleichzeitigen Starten eine einfache Vorrichtung. Zu Beginn werden die Uhren nebeneinander aufgestellt, um den Gleichlauf zu überprüfen, dann erst werden sie an ihre verschiedenen Positionen gebracht. Dann wird in der geometrischen Mitte zwischen den beiden Uhren ein Lichtsignal gestartet, das beim Erreichen der Uhren diese in Gang setzt. Man beachte, dass sich sowohl die Uhren als auch der Initiator innerhalb eines einzigen (und damit in sich ruhenden) Bezugssystem befinden!



Einstein-Synchronisation

Laut der 2. Folgerung bewegt sich das Licht in allen Systemen immer mit der selben Geschwindigkeit. Die nebenstehende Abbildung zeigt drei Bezugssysteme, von denen sich das System B0 in Ruhe befindet, das System BR sich nach rechts und das System BL nach links bewegt. Zum Zeitpunkt t=0 befinden sich alle drei Systeme unmittelbar nebeneinander, in diesem Augenblick sendet der Initiator von B0 sein Synchronisationssignal aus. Zum Zeitpunkt t=1 erreicht das Signal die linke Uhr von BR und die rechte Uhr von BL und startet diese. Zum Zeitpunkt t=2 werden beide Uhren des ruhenden Systems B0 gestartet, die anderen beiden Uhren von BR und BL sind mittlerweile weitergelaufen. Zum Zeitpunkt t=3 erreicht das Signal auch die beiden anderen Uhren von BR und BL und startet die noch fehlenden Uhren.

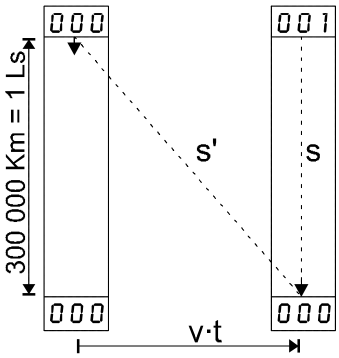


Einstein-Synchronisation in verschiedenen Bezugssystemen

Für einen Beobachter in einem der beiden bewegten Systeme gehen ihre jeweiligen Uhren nicht synchron, wohl aber für den Beobachter im ruhenden System B0, obwohl der initiierende Impuls in jedem der drei Systeme genau in der Mitte ausgesandt wurde. (Die kleinen von dem Initiator ausgehenden Pfeile kennzeichnen die Ausbreitung des Lichtimpulses. Die Skizze ist hinsichtlich der zurückgelegten Strecken nicht maßstabsgerecht!).

Die Transformation der Zeit (Zeitdilatation)

Wie man aus dem letzten Beispiel leicht erkennen kann, müssen sich andere Abläufe ergeben, wenn der Initiator sich auf einem der bewegten Bezugssysteme befindet, da er ja dort die beiden mitbewegten Uhren gleichzeitg starten müsste (Inertialsystem!). Zur Veranschaulichung soll hier ein weiteres Beispiel dienen, das mit einer sogenannten „Lichtuhr" arbeitet. Diese bestehe aus einem Rohr von 300 000 Km Länge mit zwei Sendempfängern an jedem Ende, die bei Eintreffen eines Lichtimpulses um eine Einheit weiterzählen und erneut einen Lichtimpuls zum gegenüberliegenden Senderempfänger aussenden. Befindet sich eine solche Lichtuhr in Ruhe, werden die beiden Zähler jeweils im Sekundentakt weitergezählt.
Bewegt sich nun diese Uhr bezüglich eines ruhenden Beobachters, so muss wieder gelten, dass die Lichtgeschwindigkeit in beiden Bezugssystem gleich groß und unabhängig vom System ist.



Bewegte Lichtuhr

In der nebenstehenden Abbildung bewegt sich die Lichtuhr im Bezugssystem B' mit der Geschwindkeit v bezüglich eines ruhenden Beobachters im Bezugssystem B. Vom Augenblick des Aussendens des Lichtsrahles am oberen Ende bis zum Eintreffen des Lichtes am unteren Ende vergeht für den bewegten Beobachter genau die Zeit t' = 1 s. Gleichzeitig bewegt sich die Uhr für den ruhenden Beobachter um die Strecke x = v · t. Auch für ihn dauert es die Zeit t = 1 s, bis das Licht bei der unteren Uhr ankommt.
Nun muss aber die Lichtgeschwindigkeit für beide Beobachter gleich groß sein. Dennoch hat das Licht für die beiden Beobachter offensichtlich unterschiedliche Strecken zurückgelegt.
Für den ruhenden Beobachter ergibt sich die zurückgelegte Strecke aus der Beziehung

$$s' = \sqrt{s^2 + (v \cdot t)^2} \qquad (1)$$

Der bewegte Beobachter jedoch stellt fest, dass das Licht in 1 s die Strecke s mit der Geschwindigkeit c zurückgelegt hat, für ihn gilt:

$$s = c \cdot t' \qquad (2)$$

Setzt man die Beziehung von Glg. (2) in die Gleichung (1) ein, so erhält man

$$s' = \sqrt{(c \cdot t')^2 + (v \cdot t)^2} \qquad (3)$$

Da für den ruhenden Beobachter das Licht die Strecke s' ebenfalls mit der Geschwindigkeit c durchläuft, benötigt für ihn das Licht des bewegten Beobachters die Zeit

$$t = \frac{s'}{c} \Rightarrow s' = t \cdot c \qquad (4)$$

Durch Gleichsetzen von (3) und (4) erhält man daraus

$$t \cdot c = \sqrt{(c \cdot t')^2 + (v \cdot t)^2} \qquad (5)$$

Löst man diese Gleichung nach t auf, so erhält man nach einigen Umformungen Glg. (6):

$$(c \cdot t)^2 = (c \cdot t')^2 + (v \cdot t)^2 \Rightarrow (c \cdot t')^2 = (c \cdot t)^2 - (v \cdot t)^2 \Rightarrow t'^2 = t^2 - \left(\frac{v}{c} \cdot t\right)^2 \Rightarrow \boxed{t' = t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Die Aussage des letzten Terms dieser Gleichung besagt, dass für den ruhenden Beobachter die Zeit im bewegten System langsamer abläuft als in seinem. Mit anderen Worten: wenn für den ruhenden Beobachter eine Zeit von 1 s abgelaufen ist, ist für den bewegten Beobachter erst eine kürzere Zeitspanne verstrichen. Die Zeit des bewegten Systems erscheint dem ruhenden Beobachter gedehnt, deshalb spricht man hier von *Zeitdilatation* (Zeitdehnung).
Man beachte, dass hier - anders als bei dem Beispiel für die Uhrensynchronisation - der Lichtsender mit der Uhr mitbewegt wird!

Die Transformation von Strecken (Längenkontraktion)

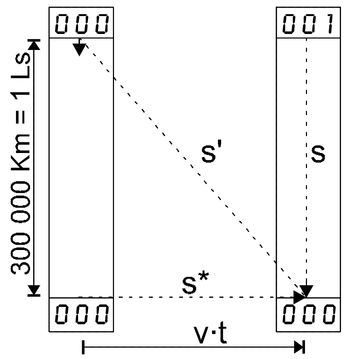
Welche Wahrnehmung hat nun aber der bewegte Beobachter? Da sich sein Bezugssystem mit der Relativgeschwindigkeit v bewegt, legt er nach seiner Zeit im ruhenden System die Strecke

$$s^* = v \cdot t' \qquad (7)$$

zurück. Für den ruhenden Beobachter gilt aber die Beziehung

$$s = v \cdot t \Rightarrow v = \frac{s}{t} \qquad (8)$$

Ersetzt man v aus Glg. (7) durch den Ausdruck von Glg. (8) und setzt für t' Glg. (6) ein, so erhält man



Längenkontraktion

$$s^* = s \cdot \frac{t'}{t} = s \cdot \frac{t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{t} = s \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Das heißt: für den bewegten Beobachter erscheint die Strecke s* um einen bestimmten Faktor verkürzt.

Während also der ruhende Beobachter im bewegten System eine Zeitdilatation beobachtet, sieht der bewegte Beobachter die Strecken des ruhenden Systems in Bewegungsrichtung verkürzt. In senkrechter Richtung bleiben für ihn aber die Streckenlängen erhalten, das hat z.B. zur Folge, dass ihm eine im ruhenden System befindliche Kugel, auf die er sich zubewegt, als ein abgeflachter Ellipsoid erscheint, der umso stärker von der Kugelform abweicht, je schneller er sich darauf zubewegt.

Myonen-Zerfall

Erst in neuerer Zeit konnte dieser Effekt experimentell an Myonen beobachtet werden. Diese entstehen in etwa 10 Km Höhe über dem Erdboden, wenn energiereiche Strahlung auf Molküle der dichteren Schichten der Atmosphäre trifft. Sie haben eine mittlere Lebensdauer von $2{,}2 \cdot 10^{-6}$ s (2,2 µs) und bewegen sich mit nahezu Lichtgeschwindigkeit. In dieser Zeit können sie eine Strecke von etwa 660 m zurücklegen. Tatsächlich erreichen einige dieser Myonen aber die Erdoberfläche. Dies läßt sich aus zwei Standpunkten heraus betrachten:

Ruhender Beobachter auf der Erdoberfläche:

Wegen ihrer hohen Geschwindigkeit beobachtet er im bewegten System der Myonen einen verlangsamten Zeitablauf, d.h., während für die Myonen eine Zeit von 2,2 µs vergeht, vergeht für ihn eine Zeit von etwa 45 µs. In dieser Zeit können die Myonen aber eine Strecke von über 13 Km zurücklegen.

Mit den Myonen bewegter Beobachter:

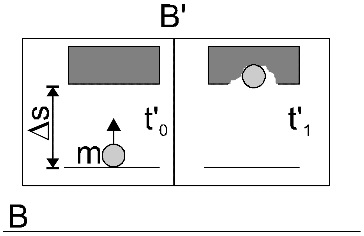
Durch die hohe Relativgeschwindigkeit erscheint die zurückzulegende Strecke für die Myonen etwa um den Faktor 20 verkürzt. Statt einer noch 10 Km dicken Lufthülle liegt in ihrem Bezugssystem lediglich nur noch 500 m lange Strecke vor ihnen, die sie in ihrer Lebenszeit von 2,2 µs ohne weiteres durchlaufen können.

In beiden Fällen erreichen die Myonen den Erdboden!

Relativistische Massenzunahme

Die Forderung, dass in einem Inertialsystem ablaufende Vorgänge in allen Systemen gleich ablaufen müssen, erfordert eine weitere Transformation, die sich aus den raumzeitlichen Transformationsgleichungen ableiten lässt und in der Physik schneller Teilchen eine große Rolle spielt.

Dazu betrachte man ein System, in dem sich eine Masse m mit einer bestimmten Geschwindigkeit auf eine Wand zu bewegt. Trifft die Masse auf die Wand, so hinterlässt sie eine Wirkung, die als eine bestimmte Zerstörung der Wand aufgefasst werden kann. Man kann diese Zerstörung z.B. auf den der Wand vermittelten Impuls $p = mv_m$ oder auf die kinetische Energie der Masse $W_{kin} = 1/2\ mv_m^2$ zurückführen. Hier soll der Impuls betrachtet werden.



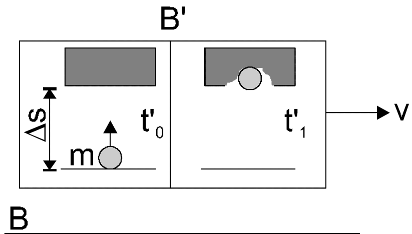
$\Delta t = t_1 - t_0 = \Delta t' = t'_1 - t'_0$

Kollision mit einer Wand

Ruht das System B' (Wand-Kugel) bezüglich eines Beobachters im System B, so treten weder Zeitdilatation noch Längenkontraktion auf. Die Geschwindigkeit - und damit die zu erzielende Wirkung - der Kugel in beiden Systemen, mit der sie die Wand trifft, lässt sich einfach berechnen. Man erhält für den Impuls die Gleichung

$$p = v_m \cdot m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot m = \frac{\Delta s}{\Delta t'} \cdot m \qquad (10)$$

Wird nun aber angenommen, dass sich das System B' (Wand-Kugel) bezüglich des ruhenden Beobachters B mit einer Geschwindigkeit v bewegt, muss die Zeitdilatation berücksichtigt werden. Der ruhende Beobachter sieht, dass die Kugel zwar die selbe Strecke zurücklegt, dafür benötigt sie jedoch eine längere Zeit als vorher, weil für ihn die Zeit im bewegten System langsamer abläuft. Zur Berechnung der Geschwindigkeit muss also das längere Zeitintervall Δt verwendet werden, während die zurückgelegte Strecke Δs gleich bleibt. Die gleichbleibende Verformung der Wand erfordert aber, dass der Impuls p der Masse m', die der Boeabachter im bewegten System sieht, genauso groß ist wie der Impuls p', den der Beobachter im bewegten System für die Masse m nach Ablauf des Zeitintervalls Δt' sieht, zusammengefasst:



$\Delta t = t_1 - t_0 > \Delta t' = t'_1 - t'_0$

Kollision mit einer Wand in einem bewegten System

$$\text{ruhendes System: } p = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot m' \qquad \text{bewegtes System: } p' = \frac{\Delta s}{\Delta t'} \cdot m \qquad (11a,b)$$

Man erhält daraus die Gleichungskette

$$p = p' \Rightarrow \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot m' = \frac{\Delta s}{\Delta t'} \cdot m \Rightarrow \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot m' = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \boxed{m' = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \qquad (12)$$

das heißt, die Masse m', die ein ruhender Beobachter in einem bewegten System beobachtet, ist größer als die selbe Masse m im ruhenden System. Man bezeichnet deshalb die Masse m als die *Ruhemasse* m_0 und die Masse m' im bewegten System als die *relativistische Masse* m_r.

Daraus folgert eine wichtige Beschränkung für massebehaftete Objekte:

Beschleunigt man eine Masse m_0 aus der Ruhelage heraus mit einer konstanten Kraft F, so ergibt sich zwangsläufig, dass die Beschleunigung - also die Geschwindigkeitszunahme - mit zunehmender Geschwindigkeit abnehmen muss, da die zu beschleunigende Masse immer größer wird. Folglich kann keine Masse auf Lichtgeschwindigkeit beschleunigt werden, da die Masse m_r mit zunehmender Annäherung von v an c gegen Unendlich geht. Es ergibt sich die fundamentale Erkenntnis:

Kein Objekt mit einer Ruhemasse $m_0 > 0$ kann sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen.

Relativistische Energie einer bewegten Masse

Wenn die Masse eines Objektes mit der Geschwindigkeit zunimmt, liegt es nahe, die kinetische Energie des Objektes mit Hilfe der Massenzunahme auszudrücken. Dazu betrachtet man zunächst die Differenz zwischen Ruehmasse und relativistischer Masse

$$m_r - m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0 = m_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \tag{13}$$

Für Geschwindigkeiten v, die sehr klein gegenüber c sind, gilt die mathematische Näherung

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cong 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} \quad \text{(dies sind die ersten Glieder einer Reihenentwicklung)} \tag{14}$$

Durch Einsetzen erhält man die Gleichung

$$m_r - m_0 = m_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} - 1 \right) = m_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot v^2 \cdot \frac{1}{c^2} = E_{kin} \cdot \frac{1}{c^2} \tag{15}$$

Für kleine Geschwindgkeiten entspricht die Massendifferenz folglich der kinetischen Energie dividiert durch das Quadrat der Lichgeschwindigkeit.

In der relativistischen Mechanik behält man diese Deutung bei und erhält den allgemeineren Ausdruck

$$E_{kin} = (m_r - m_0) \cdot c^2 \tag{16}$$

Durch Ausmultiplizieren ergeben sich zwei Terme, die jeweils die Dimension einer Energie haben:

$$E_{kin} = m_r \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2 \tag{17}$$

Man interpretiert den ersten Term als die relativistische Gesamtenergie

$$E_r = m_r \cdot c^2 \tag{18}$$

und den zweiten Term als die Ruheenergie der Masse m:

$$E_0 = m_0 \cdot c^2 \tag{19}$$

Demnach setzt sich die Gesamtenergie einer Masse m zusammen aus seiner Ruheenergie E_0 und der kinetischen Energie E_{kin}:

$$E_r = E_0 + E_{kin} \tag{20}$$

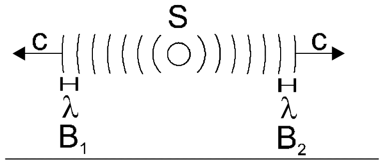
Die Deutung der Ruheenergie einer Masse m ist die wohl bekannteste Gleichung aus Einsteins Relativitätstheorie, ordnet sie doch einer Masse eine Energie zu, deren Dimension weitaus größer ist als die, die sie durch eine Bewegung mit „klassischen“ Geschwindigkeiten erhalten kann.
Z.B. wird dadurch einer Masse von einem Kilogramm die Ruheenergie

$$E_0 = 1\text{Kg} \cdot (3 \cdot 10^8 \tfrac{m}{s})^2 = 9 \cdot 10^{16}\,\text{J}$$

zugeordnet. Das entspricht der kinetischen Energie einer Masse von 1 Mill. Tonnen, die mit 13,4 Km/s aufprallt - also ein mittelgroßer Asteroid aus dem fernen Weltraum. Der Arizona-Krater ist vermutlich die Folge eines solchen Impacts.
Betrachtet man die Gesamtenergie eines Systems, muss immer sowohl die Ruheenergie als auch die kinetische Energie berücksichtigt werden, nur so kann man erklären, warum bei der Kollision schneller atomarer Bausteine Partikel entstehen können, deren Gesamtmasse größer ist als die Masse der Kollisionspartner. Die zusätzliche Masse stammt dann aus der Umwandlung von Energie in Masse.

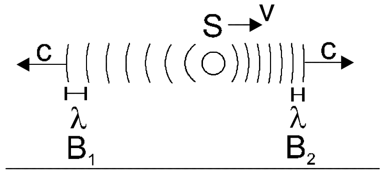
Der Doppler-Effekt

Eine ruhende Schallquelle sende in einem Trägermedium Schallwellen einer bestimmten Frequenz f aus, die sich mit der Geschwindgkeit c in dem Medium ausbreiten. Die Wellenlänge λ ergibt sich dann für einen ruhenden Beobachter B_1 oder B_2 zu



Ruhende Schallquelle

$$\lambda = \frac{c}{f} \qquad (21)$$



Bewegte Schallquelle

Bewegt sich die Schallquelle innerhalb des Trägermediums, so werden die Wellenlängen in Bewegungsrichtung verkürzt und gegen die Bewegungsrichtung verlängert.
Folglich hören zwei Beobachter B1 und B2 unterschiedliche Frequenzen, da die Schallwellen mit unterschiedlichen Wellenlängen bei ihnen eintreffen. Man beachte dabei, dass das Trägermedium ruht, also die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Schallwelle in beiden Richtungen die selbe ist!
Da sich die Quelle in der Zeit T, in der sich die Welle um die Strecke λ ausbreitet, selbst um die Strecke $s = v \cdot T$ weiterbewegt, wird für den ruhenden Beobachter die Wellenlänge λ um die Strecke s verlängert oder verkürzt. Sie beobachten die Wellenlänge

$$\text{B1:} \quad \lambda_1 = \lambda + T\cdot v = \lambda + \frac{1}{f}\cdot v = \lambda + \frac{\lambda}{c}\cdot v = \lambda\cdot\left(1+\frac{v}{c}\right) \Rightarrow f_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{f}{1+\frac{v}{c}} \qquad (22a)$$

$$\text{B2:} \quad \lambda_2 = \lambda - T\cdot v = \lambda - \frac{1}{f}\cdot v = \lambda - \frac{\lambda}{c}\cdot v = \lambda\cdot\left(1-\frac{v}{c}\right) \Rightarrow f_2 = \frac{c}{\lambda_2} = \frac{f}{1-\frac{v}{c}} \qquad (22b)$$

Der Beobachter B_1 nimmt also eine tiefere, der Beobachter B_2 eine höhere Frequenz als die wahr, die tatsächlich von der Schallquelle ausgesendet wird.

Dieser Dopplereffekt tritt bei allen Wellen auf, also auch beim Licht. Dort allerdings sind die Lorentztransformationen zwischen ruhendem und bewegtem Bezugssystem anzuwenden. Für die Periodendauer T des bewegten Senders nimmt der ruhende Beobachter die Zeit

$$T' = T\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (23)$$

wahr. Da die Frequenz sich aus dem Kehrwert der Periodendauer ergibt, gilt für diese die Transformationsgleichung

$$f' = f\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad (24)$$

Setzt man diese Frequenz in die Gleichungen (22a,b) ein, so erhält man für die beiden Beobachter

$$\text{B1:} \quad f_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{f\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v}{c}} = f\cdot\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}} \quad \text{bzw.} \quad \lambda_1 = \lambda\cdot\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} \quad \text{Rotverschiebung} \quad (25a)$$

$$\text{B2:} \quad f_2 = \frac{c}{\lambda_2} = \frac{f\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c}} = f\cdot\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} \quad \text{bzw.} \quad \lambda_2 = \lambda\cdot\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}} \quad \text{Blauverschiebung} \quad (25b)$$

Additionstheorem für relativistische Geschwindgkeiten

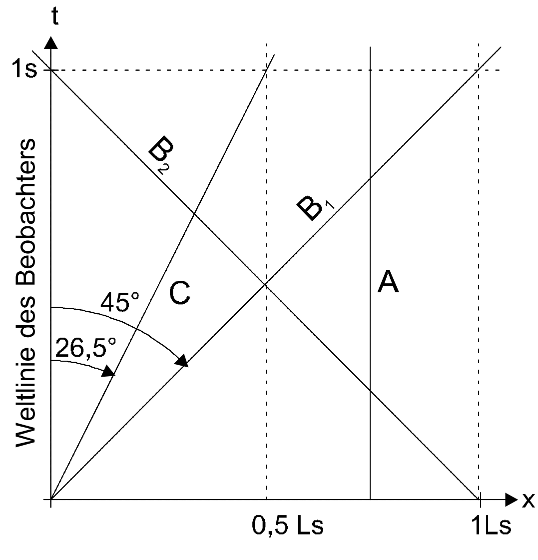
Wird in einem bezüglich eines ruhenden Beobachters B mit der Geschwindgkeit v bewegten Bezugssystems B' seinerseits ein Bezugssystem B'' mit der Geschwindgkeit u bezüglich B' bewegt, ergibt sich die Geschwindigkeit von B'' bezüglich B nicht einfach wie bei den Galilei-Transformationen durch Addition der Geschwindigkeiten.
Auch eine Beobachtung des gesamten Ablaufes aus der Sicht des ruhenden Beobachters führt nicht weiter, da die Messvorschrift für die Bestimmung der Geschwindigkeit im bewegten System synchronisierte Uhren voraussetzt, deren Gleichzeitigkeit im ruhenden System nicht mehr gegeben ist.
Zur Entwicklung einer geeigneten Transformation benutzt man Minkowski-Diagramme (s.u.). Diese ergeben die Beziehung

$$u = \frac{u'+v}{1+\frac{u' \cdot v}{c}} \qquad (26)$$

darin ist u die gesuchte Geschwindigkeit, die der ruhende Beobachter B für das System B'' messen wird, u' die Geschwindigkeit, die der bewegte Beobachter B' für das System B'' misst und v die Geschwindigkeit, mit der sich das System B' bezüglich B bewegt.
Die Gleichung (26) kann mit $u' < c$ und $v < c$ keine Werte annehmen, die größer oder gleich c sind.
Für den klassischen Fall ($u', v << c$) geht der Nenner gegen 1 und es ergibt sich das Galileische Additionstheorem für Geschwindigkeiten.

Minkowski-Diagramme

Eine besondere Art von Koordinatensystem, das nach Hermann Minkowski (dtsch. Mathematiker) benannt wurde, erlaubt eine übersichtliche Darstellung raumzeitlicher Ereignisse insbesondere der relativistischen Kinematik.

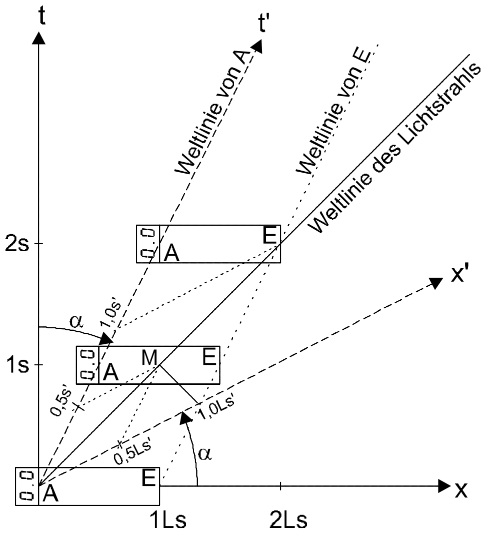


Weltlinien im Minkowski-Diagramm

Im ruhenden System besteht das Diagramm aus zwei orthogonalen Achsen, wobei die Rechtsachse eine Strecke (1 LE = 1 Ls) und die Hochachse eine Zeit (1 LE = 1 s) darstellt. Tatsächlich handelt es sich bei der Rechtsachse um einen dreidimensionalen Raumvektor, doch aus Gründen der Darstellbarkeit wird lediglich die Raumkomponente angegeben, in der sich ein Bezugssystem B' innerhalb des durch das Diagramm festgelegten ruhenden Bezugssystems B bewegt.
Die raumzeitliche Bewegung eines Objektes in diesem Koordinatensystem stellt sich immer als eine Linie dar, die zum Zeitpunkt des Entstehens des Objektes beginnt und mit dem Ende seiner Existenz endet. Diese Linien bezeichnet man als *Weltlinien* der Objekte. Befindet sich ein Objekt in Ruhe - also immer an dem gleichen Raumpunkt - so ist seine Weltlinie eine Parallele zur t-Achse (A). Bewegt sich ein Objekt mit Lichtgeschwindigkeit, so bildet es mit der t-Achse je nach Bewegungsrichtung einen Winkel von 45° bzw. -45° (B_1, B_2). Größere Winkelbeträge können nicht auftreten, da sich das Objekt dann mit einer Geschwindigkeit $v > c$ bewegen müsste. Ein Objekt, das sich mit der Geschwindigkeit $v = 0{,}5 \cdot c$ bewegt, schließt mit der t-Achse einen Winkel von etwa 26,5° ein (C).
Die Weltlinie des Beobachters im ruhenden System wird durch die t-Achse dargestellt. Das Objekt B_1 stellt z.B. einen Lichtstrahl aus, der vom Beobachter ausgesandt wird, während gleichzeitig aus einer Entfernung von 1 Ls ein zweiter Lichtstrahl B_2 in Richtung auf den Beobachter geschickt wird.
Dieser trifft nach 1 s beim Beobachter ein.

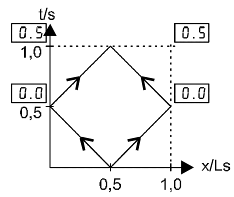
Die Lichtuhr im Minkowski-Diagramm

Zum Zeitpunkt t = 0 befinde sich die Lichtuhr mit ihrem Endpunkt A im Koordinatenursprung des ruhenden Systems. Da sie sich mit einer Geschwindigkeit v bezüglich des ruhenden Systems bewegt, ergeben sich für die Endpunkte A und E die beiden gestrichelt eingezeichneten Weltlinien. Im selben Zeitpunkt wird ein Lichtsignal in Richtung des Endpunktes E der Lichtuhr ausgesandt. Da dieses sich mit Lichgeschwindigkeit bewegt, ist seine Weltlinie die Winkelhalbierende des ruhenden Koordinatensystems.
Für den ruhenden Beobachter befindet sich der Punkt A in Bewegung, während er für den bewegten Beobachter in Ruhe bleibt. Die Weltlinie des Punktes A wird für den ruhenden Beobachter durch die um den Winkel α geneigte Linie dargestellt, während sie für den bewegten Beobachter (kleines Diagramm) mit seiner t'-Achse zusammenfällt. Da in beiden Systemen die Weltlinie des Lichtstrahles jeweils die Winkelhalbierende zwischen den Achsen sein muss, ergibt sich die entsprechende Achse x' durch Spiegelung an der Weltlinie des Lichtstrahles, sie schließt mit der Achse x den gleichen Winkel α ein wie die Achse t' mit der t-Achse.



Koordinatenachsen eines bewegten Systems im Minkowski-Diagramm

Für den bewegten Beobachter in der Lichtuhr sind die Punkte A und E in seinem System ruhend. Da sich auch für ihn der Punkt E in einem Abstand von 1 Ls befindet, kann er seine Uhren z.B. dadurch synchronisieren, indem er zu einem bestimmten Zeitpunkt ein Lichtsignal aus der Mitte seiner Uhr in Richtung auf die Endpunkte startet (siehe kleines Bild). Anschließend sendet jeder Endpunkt wieder ein Lichtsignal aus, die sich wieder in M treffen. Überträgt man den zweiten Teil dieses Prozesses in das Diagramm des ruhenden Beobachters, müssen die beiden punktiert eingezeichneten Parallen zur x' und t'-Achse wiederum parallel zur x'- und t'-Achse sein, dort stehen sie allerdings nicht mehr im rechten Winkel zueinander! Die Uhrensynchronisation ermöglicht nun aber eine andere Skalierung der Achsen im bewegten System (1LE im bewegten System ist länger als im ruhenden System).



Uhrensynchronisation des bewegten Beobachters

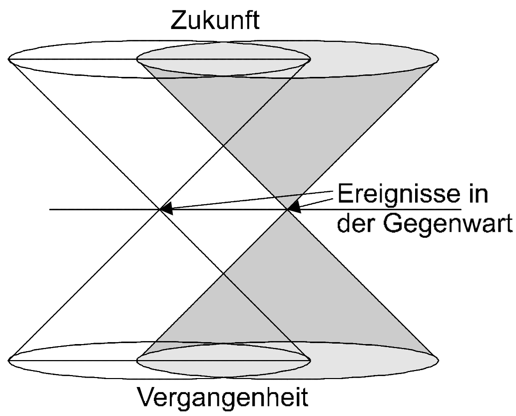
Der Winkel zwischen den Minkowski-Achsen eines bewegten Systems wird mit zunehmender Geschwindigkeit bezogen auf ein ruhendes System immer kleiner. Bewegt sich das System mit der Geschwindigkeit v, so gilt für den Winkel α zwischen den Achsen t und t' bzw. x und x':

$$\tan\alpha = \frac{v}{c} \qquad (27)$$

Die Skalierung der Achsen des sich bewegenden Systems ergibt sich aus der Lorentztransformation. Hat die Längeneinheit der Achsen im ruhenden System den Wert e, so ergibt sich die Längeneinheit des bewegten Systems e' im Maßstab des ruhenden zu

$$e' = e \cdot \sqrt{\frac{c^2 + v^2}{c^2 - v^2}} \qquad (28)$$

Aus dem Verlauf der Weltlinien im Minkowski-Diagramm läßt sich eine relativistische Deutung des Prinzips von Ursache und Wirkung ablesen. Zwei Ereignisse, die an verschiedenen Orten gleichzeitig stattfinden, können an einem dritten Ort erst dann miteinander wechselwirken, wenn so viel Zeit verstrichen ist, dass sich die beiden als Kegel dargestellten Raumzeiten überlappen. Findet außerhalb der beiden angedeuteten Kegel ein drittes Ereignis statt, so kann dieses in keiner Ursache-Wirkung-Beziehung zu einem der anderen beiden Ereignisse stehen.



Relativistische Deutung von Ursache und Wirkung

„Du hättest dem Mann keinen Korb geben dürfen. Er hat eine einwandfreie Vergangenheit und eine glänzende Zukunft."
„Schon richtig, Mutti, aber seine Gegenwart geht mir auf die Nerven!"

Energie und Impuls

Stößt ein sich bewegendes Objekt auf ein ruhendes, überträgt es bei diesem Stoßprozess einen Teil seiner Energie und seines Impulses auf das ruhende Objekt. In Teilchenbeschleunigern kann es sich z.B. um Protonen handeln, die nach einer Beschleunigsphase mit hoher Geschwindigkeit auf die ruhenden Protonen eines Targets (Ziel) treffen. Ist die an das ruhende Proton übermittelte Energie groß genug, so können dabei weitere Teilchen entstehen. Ein möglicher Prozess wäre dabei der Vorgang

$$p + p \rightarrow p + p + \overline{p} + p$$

Dabei stößt ein Proton auf ein zweites Proton. Nach dem Stoß findet man die beiden ursprünglichen protonen sowie ein Antiproton (gekennzeichnet durch den Querstrich) und ein weiteres Proton (Zusammen mit einem geladenen Teilchen muss wegen der Ladungserhaltung immer auch das entsprechende Antiteilchen entstehen). Wie groß muss die Energie des stoßenden Protons für diesen Prozess sein?

Für das stoßende Proton gelten folgende Beziehungen:

Impuls: $$p = m_r \cdot v \qquad (29)$$

Ruheenergie: $$E_0 = m_0 \cdot c^2 \qquad (30)$$

Gesamtenergie: $$E_r = m_r \cdot c^2 \qquad (31)$$

Löst man die Glg. (29) und (31) nach m_r auf, erhält man

$$m_r = \frac{p}{v} \quad \text{bzw.} \quad m_r = \frac{E_r}{c^2} \qquad (29a, 31a)$$

Durch Gleichsetzen der beiden Glg. (29a) und (31a) erhält man daraus die Beziehung

$$\frac{p}{v} = \frac{E_r}{c^2} \Rightarrow E_r \cdot v = c^2 \cdot p \qquad (32)$$

Für die an einem Teilchen der Masse m verrichtete Arbeit gilt die Beziehung

$$dW = F_s ds \qquad (33)$$

Durch Erweitern mit dem Differential dt erhält man daraus

$$dW = F_s dt \cdot \frac{ds}{dt} \qquad (33a)$$

Der Term $F_t dt$ bezeichnet die Impulsänderung dp, während ds/dt die Geschwindgkeit angibt. Somit erhält man für die Änderung der Energie die Gleichung

$$dW = dp \cdot v = dE \qquad (33b)$$

Multiplikation mit E und Einsetzen von Glg. (32) liefert die Gleichung

$$E_r \, dE = c^2 \cdot p \, dp \qquad (34)$$

Durch Integration erhält man

$$\int E_r \, dE = c^2 \cdot \int p \, dp + C \Rightarrow \frac{1}{2} E_r^2 = \frac{1}{2} c^2 p^2 + C \qquad (35)$$

Für p = 0 ist die Gesamtenergie $E_r = E_0$, deshalb ergibt sich für die Konstante C der Wert

$$C = \frac{1}{2} E_0^2 \qquad (36)$$

Einsetzen in Glg. (35) und Erweitern mit 2 liefert die Energie-Impuls-Invariante

$$E_r^2 - (c \cdot p)^2 = E_0^2 \qquad (37)$$

Den Term links vom Gleichheitszeichen bezeichnet man als *Invariante*, da er in jedem Bezugssystem den gleichen Wert E_0^2 hat und damit unabhängig vom jeweiligen Bezugssystem ist.

Wendet man die Glg. (37) auf die anfangs erwähnte Reaktion an, so ergeben sich folgende Überlegungen:
Vor dem Stoßprozess finden wir zwei Protonen vor, von denen sich das eine in Ruhe befindet, dessen Energiebeitrag ist also allein seine Ruheenergie, während das andere sich mit einer Geschwindigkeit v bewegt und deshalb neben seiner Ruheenergie auch noch eine kinetische Energie sowie einen bestimmten Impuls beiträgt. Ruheenergie und kinetische Energie ergeben zusammen die relativistische Gesamtenergie E_r des stoßenden Protons.
Nach dem Stoßprozess existieren 4 Teilchen mit der Masse eines Protons (die Masse eines Antiprotons ist genauso groß wie die eines Protons), die prinzipiell keine eigene kinetische Energie mehr besitzen müssen. (Gegebenenfalls wird das gemeinsame Schwerpunktssystem als Bezugssystem gewählt, was bei dieser Invariante ja erlaubt ist).

Da nach Glg. (37) Energie und Impuls eine Invariante bilden, ergibt sich die Beziehung

$$(E_r + m_0 \cdot c^2)^2 - (c \cdot p)^2 = (4 \cdot m_0 \cdot c^2)^2 \qquad (38)$$

dabei gibt die linke Seite die Situation vor dem Stoß und die rechte Seite die Situation nach dem Stoß wieder. Multipliziert man die einzelnen Terme aus, so erhält man

$$E_r^2 + 2 \cdot E_r \cdot m_0 \cdot c^2 + (m_0 \cdot c^2)^2 - (c \cdot p)^2 = 16 \cdot (m_0 \cdot c^2)^2$$

Auch für das stoßende Proton gilt die Beziehung von Glg. (37):

$$E_r^2 - (c \cdot p)^2 = (m_0 \cdot c^2)^2 \;\Rightarrow\; (c \cdot p)^2 = (m_0 \cdot c^2)^2 - E_r^2 \qquad (39)$$

Setzt man den letzten Ausdruck für $(c \cdot p)^2$ von Glg. (39) in Glg. (38) ein, so erhält man

$$E_r^2 + 2 \cdot E_r \cdot m_0 \cdot c^2 + (m_0 \cdot c^2)^2 - \left(E_r^2 - (m_0 \cdot c^2)^2\right) = 16 \cdot (m_0 \cdot c^2)^2 \qquad (40)$$

Durch Auflösen der Klammern ergibt sich

$$E_r = 7 \cdot m_0 \cdot c^2 \qquad (41)$$

Nach Glg. (20) setzt sich diese Energie zusammen aus der Ruheenergie E_0 und der kinetischen Energie E_{kin}, mithin muss das stoßende Proton die kinetische Energie

$$E_r = E_{kin} + E_0 = E_{kin} + m_0 \cdot c^2 \Rightarrow E_{kin} = 6 \cdot m_0 \cdot c^2 = 6 \cdot E_0 \qquad (42)$$

transportieren. Die Ruheenergie eines Protons ergibt sich nach Glg. (19) zu

$$E_0 = m_0 \cdot c^2 = 1{,}673 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{Kg} \cdot (2{,}998 \cdot 10^8\,\tfrac{m}{s})^2 = 1{,}504 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J} = 939\,\mathrm{MeV}$$

Das Proton muss also im Beschleuniger eine zusätzliche Energie von 5632 MeV bzw. 5,6 GeV aufnehmen, damit durch einen Stoßprozess weitere Protonen erzeugt werden können.
□m die Geschwindigkeit des stoßenden Protons zu bestimmen, benutzt man Glg. (18):

$$E_r = m_r \cdot c^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot c^2 = 7 \cdot m_0 \cdot c^2 \;\Rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 7 \qquad (43)$$

Auflösen nach v liefert

$$1 = 49 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \Rightarrow \frac{1}{49} = 1 - \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow v^2 = c^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{49}\right) \Rightarrow v = c \cdot \frac{\sqrt{48}}{7} = 0{,}9897 \cdot c$$

Das Proton bewegt sich also etwa 1 % unterhalb der Lichtgeschwindigkeit.

Gleichung (42) gilt nicht nur für Protonen, sondern auch für eine entsprechende Teilchenerzeugung durch Stöße zwischen Elektronen. Hier erhält man als notwendige Energie eine Ruheenergie von ca. 512 KeV und damit für das stoßende Elektron eine kinetische Energie von 3,07 MeV. Die Geschwindigkeit ist die selbe wie die vorher berechnete für das Proton, da sich in Glg. (43) die Teilchenmasse herauskürzt. Statt 5,6 GV Beschleunigungsspannung muss es aber wegen seiner um den Faktor 1836 geringeren Masse lediglich 1/1836 der Spannung, nämlich 3,1 MV durchlaufen.

Anwendungsbeispiele

1.) Rotverschiebung von weit entfernten Galaxien

Die in der Kosmologie angenommene Ausdehnung unseres Weltalls führt dazu, dass mit zunehmendem Abstand eine immer größere Geschwindigkeit auftritt, mit der sich diese Galaxien von uns entfernen. Anregungsprozesse in den Gasen - insbesondere Wasserstoff - führen zur Aussendung von Licht bestimmter Wellenlängen, die für jedes Element charakteristisch sind. Eine dieser Linien ist die Wasserstofflinie mit einer Wellenlänge von 656 nm.
Welche Wellenlänge wird beobachtet, wenn sich eine solche Galaxie mit v = 2/3 c von uns fort bewegt?
Welche Wellenlänge würden wir beobachten, wenn diese Galaxie sich nicht von uns fort, sondern quer zu uns mit der selben Geschwindigkeit bewegen würde?

Lösung:
Für die erste Frage ist Glg. (25a) anzuwenden, da sich die Galaxie von uns als ruhendem Beobachter entfernt. Einsetzen der Zahlenwerte liefert

$$\lambda_1 = 656\text{nm} \cdot \sqrt{\frac{1+\frac{\frac{2}{3}c}{c}}{1-\frac{\frac{2}{3}c}{c}}} = 656\text{nm} \cdot \sqrt{\frac{1+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}} = 656\text{nm} \cdot \sqrt{\frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{3}}} = 656\text{nm} \cdot \sqrt{5} = 1467\text{nm}$$

Für die zweite Frage ist Glg. (24) zu verwenden, da hier kein Dopplereffekt auftritt, aber aus der Sicht des beobachters die Zeit für das System, das die Welle erzeugt, langsamer abläuft. Die vom ruhenden Beobachter beobachtete Wellenlänge bestimmt sich damit zu

$$\lambda' = \frac{c}{f'} = \frac{c}{f \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \lambda \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Einsetzen der Zahlenwerte ergibt

$$\lambda' = 656\text{nm} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\left(\frac{2}{3}c\right)^2}{c^2}}} = 656\text{nm} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{9}}} = 656\text{nm} \cdot \sqrt{\frac{9}{5}} = 880\text{nm}$$

Die so beobachtete Wellenlänge ist zwar ebenfalls rotverschoben, aber deutlich geringer als bei gleichzeitiger Entfernung vom Beobachter.

2.) Zeitdilatation bei Satelliten

Satelliten in erdnahen Umlaufbahnen bewegen sich mit einer Geschwindigkeit v = 28 800 km/h = 8000 m/s. Wie groß ist der Gangunterschied zwischen einer Uhr auf der Erde und einer Uhr auf einem solchen Satelliten?

Lösung:
Der ruhende Beobachter auf der Erde beobachtet für den Satelliten eine gedehnte Zeit nach Glg. (6)

$$t' = t \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \;\Rightarrow\; \Delta t = t - t' = t - t \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = t \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

Einsetzen der Zahlenwerte liefert $\Delta t = t \cdot 3{,}6 \cdot 10^{-10}$, also eine Abweichung von 1 s in 88 Jahren.

3.) Synchro-Zyklotron

In einem Zyklotron werden geladene Teilchen durch Magnetfelder auf Kreisbahnen innerhalb zweier Dee's gezwungen, zwischen denen ein elektrisches Wechselfeld bei jedem Umlauf eine Beschleunigung bewirkt. Wenn die Beschleunigungsspannung 50 KV beträgt, erreichen die Elektronen bereits nach der ersten Beschleunigung zwischen den Dee's Geschwindigkeiten, in denen die relativistische Massenzunahme erkennbar wird.
Welche Auswirkungen hat diese relativistische Massenzunahme auf die für die Beschleunigung notwendige Frequenz des Beschleunigungsfeldes und die Bahn, die die Teilchen im Magnetfeld beschreiben?

Lösung:
Der Zuwachs an Energie wird ausschließlich durch die durchlaufene Spannungsdifferenz (konstant nach Vorgabe) und die Ladung (konstant in allen Inertialsystemen) bestimmt. Folglich nimmt die kinetische Energie des Elektrons bei jedem Umlauf um

$$\Delta E_{kin} = e \cdot U$$

zu. Die Geschwindigkeitszunahme muss nun allerdings über die relativistische Gesamtenergie bestimmt werden. War das Elektron zuvor in Ruhe, hat es nach der Beschleunigung seine Energie genau um ΔE_{kin} vergrößert:

$$E_1 = E_0 + \Delta E_{kin} = m_{r,1} \cdot c^2 = m_0 \cdot c^2 + e \cdot U$$

Nach dem zweiten Umlauf hat es die Energie

$$E_2 = E_1 + \Delta E_{kin} = m_{r,1} \cdot c^2 = m_0 \cdot c^2 + 2 \cdot e \cdot U$$

und nach n Umläufen ergibt sich die Gesamtenergie zu

$$E_n = E_{n-1} + \Delta E_{kin} = m_{r,n-1} \cdot c^2 = m_0 \cdot c^2 + n \cdot e \cdot U$$

Die Geschwindigkeit muss aus der relativistischen Masse bestimmt werden. Sie ergibt sich nach n Umläufen aus

$$E_n = m_{r,n} \cdot c^2 = m_0 \cdot \frac{c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow m_0 \cdot c^2 + n \cdot e \cdot U = m_0 \cdot c^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

zu

$$n \cdot e \cdot U = m_0 \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \Rightarrow \frac{n \cdot e \cdot U + m_0 \cdot c^2}{m_0 \cdot c^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow v = c \cdot \sqrt{1 - \frac{m_0 \cdot c^2}{n \cdot e \cdot U + m_0 \cdot c^2}}$$

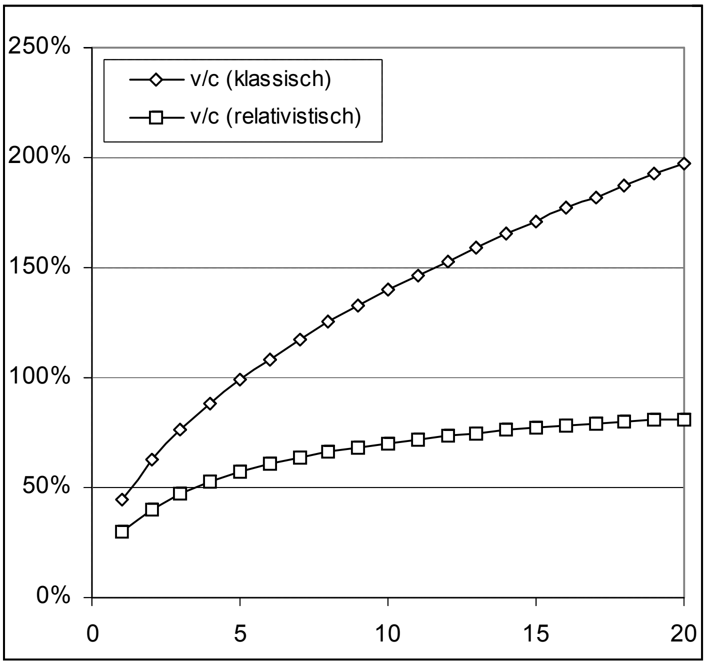
Für den Bahnradius r in einem homogenen zeitlich konstanten Magnetfeld B folgt aus der Gleichgewichtsbedingung (hier muss bereits die relativistische Masse m_r eingesetzt werden) die Beziehung

$$m_r \cdot \frac{v^2}{r} = q \cdot v \cdot B \Rightarrow r = \frac{m_r \cdot v}{q \cdot B} = \frac{\sqrt{n \cdot e \cdot U \cdot m_0}}{q \cdot B}$$

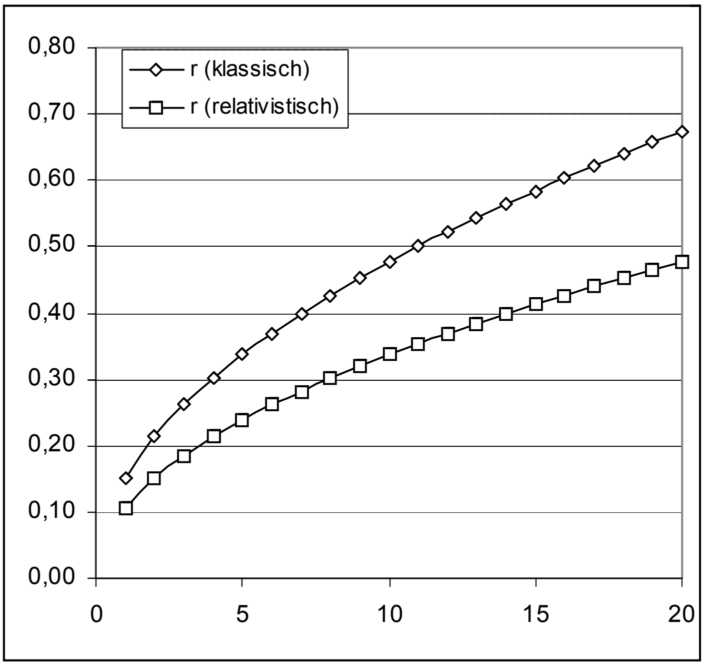
Die Umlaufzeit eines Elektrons bestimmt sich aus dem als konstant vorgegebenen Bahnradius r und der Geschwindigkeit v zu

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot m_0}{q \cdot B} \cdot \sqrt{1 + \frac{n \cdot e \cdot U}{m_0 \cdot c^2}}$$

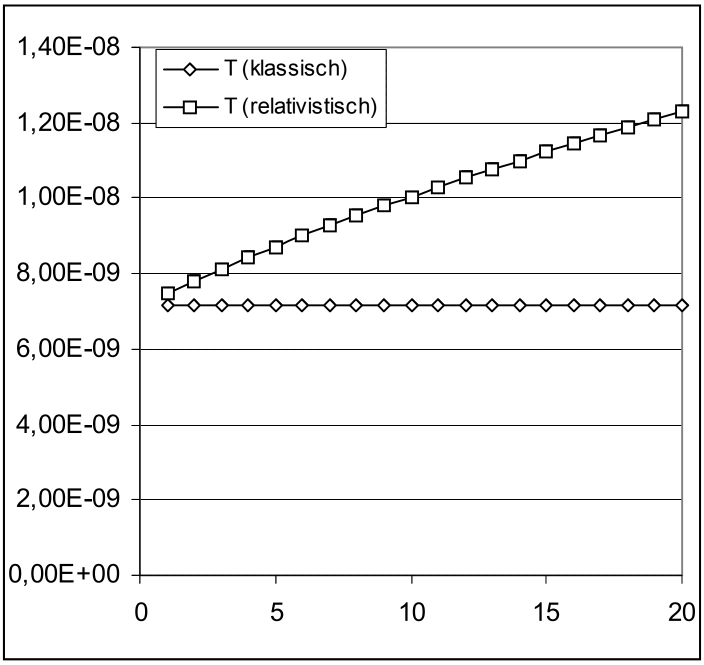
Die Ergebnisse der letzten beiden Gleichungen für U = 50 KV sind graphisch für ein Elektron angegeben, das in einem solchen Synchro-Zyklotron bei einer konstanten magnetischen Feldstärke B = 5 mT 20 Umläufe vollführt. Zum Vergleich wurden hier die Werte mit abgedruckt, die sich ergeben, wenn man nicht relativistisch rechnet.



Das obere Diagramm zeigt die Entwicklung der Geschwindgkeit. Nach klassischer Rechnung überschreitet das Elektron bereits nach dem 5. Umlauf die Lichtgeschwindigkeit, was nicht möglich ist, während es nach der relativistischen Rechnung auf Grund der Massenzunahme mit zunehmender kinetischer Energie sich allmählich der Lichtgeschwindigkeit annähert und nach 20 Umläufen 81 % von c erreicht.



Das mittlere Diagramm zeigt die Zunahme des Bahnradius, den das Elektron im magnetischen Feld auf Grund der Lorentzkraft beschreibt. Da die Geschwindigkeit langsamer zunimmt als im klassischen Fall, nimmt auch der Bahnradius langsamer zu. Da gleichzeitig die Masse größer wird, ist der Unterschied jedoch prozentual geringer als im oberen Diagramm.



Den für den Betrieb des Synchro-Zyklotrons gravierensten Unterschied zeigt das untere Diagramm. Während die Umlaufzeit nach klassischer Rechnung konstant bleibt und somit auch die Frequenz der Wechselspannung zwischen den Dee's (140 MHz), nimmt die Umlaufzeit nach relativistischer Rechnung mit der Anzahl der Umläufe zu, folglich muß die Frequenz der Wechselspannung von anfangs 140 MHz bis auf 81,4 MHz beim 20. Umlauf verändert werden, damit die Umpolung der Dee's immer zum richtigen Zeitpunkt erfolgt. Der Name dieser Beschleunigerart rührt also daher, dass die Frequenz synchron mit der Anzahl der Umläufe fortwährend angepasst werden muss.