

Modelle und Theorien

ein unterrichtsbegleitendes Scriptum

Inhaltsverzeichnis

1	Relativitätstheorie	3
1.1	Ruhende und bewegte Beobachter	3
1.2	1. Einsteinsches Postulat: Inertialsysteme	4
1.3	2. Einsteinsches Postulat: Invarianz der Lichtgeschwindigkeit	4
1.4	Folgerungen aus den Einsteinschen Postulaten	5
1.4.1	Zeitdilatation	5
1.4.1.1	Die Geometrie der Zeitdilatation	6
1.4.1.2	Zeitdilatation bei Myonen	6
1.4.2	Längenkontraktion	6
1.4.2.1	Herleitung der Längenkontraktion aus der Zeitdilatation	7
1.4.2.2	Längenkontraktion bei Myonen	7
1.4.3	Relativistische Masse	7
1.5	Die Äquivalenz von Masse und Energie	8
1.5.1	Konsequenzen aus dem relativistischen Erhaltungssatz	9
1.5.1.1	Relativistische Masse von Myonen	10
1.5.1.2	Massen und Energien im Vergleich	10
2	Quantenobjekte	11
2.1	Welle-Teilchen-Dualismus	11
2.1.1	Fotoeffekt: Photonen als Quantenobjekte	11
2.1.2	Die kurzwellige Grenze der Röntgenstrahlung	13
2.1.3	Das Plancksche Wirkungsquantum	14
2.1.3.1	Die Masse des Lichts	15
2.1.3.2	Der Impuls des Lichtes	15
2.1.4	Elektronenbeugung: Welleneigenschaften von Elektronen	15
2.1.4.1	Die deBroglie-Wellenlänge von Elektronen	16
2.1.4.2	Elektronenbeugung an Kristallebenen	17
2.1.5	Der Compton-Effekt	18
2.2	Stochastische Deutung von Quantenobjekten	19
2.3	Beobachtung von Quantenobjekten	20
2.4	Die Heisenbergsche Unschärferelation	20
2.4.1	Die Unschärfe eines Staubkornes	21
2.4.2	Die Unschärfe eines Elektrons im Wasserstoffatom	21
3	Physik der Atome	22
3.1	Atommodelle	22
3.1.1	Der Rutherford'sche Streuversuch	22
3.1.2	Das Bohrsche Atommodell	23
3.1.2.1	Bahnenergien beim Bohrschen Atommodell	24
3.1.2.2	Die Spektralserien des Wasserstoffs	25
3.1.2.3	Die Grenzen des Bohrschen Atommodells	26
3.1.3	Das quantenphysikalische Atommodell des linearen Potenzialtopfes	26
3.1.3.1	Bahn- und Übergangsenergien beim Potenzialtopf-Modell	28
3.1.3.2	Anwendungen des Potenzialtopf-Modells	28
3.2	Prozesse in der Atomhülle	29
3.2.1	Emissions- und Absorptionsspektren	29
3.2.2	Franck-Hertz-Versuch	30
3.2.3	Röntgenspektren	31

1 Relativitätstheorie

Um 1900 herum schien es so zu sein, dass die Physik nahezu alle damals bekannten Erscheinungen erklären konnte. Die Newtonschen Gesetze hatten sich bewährt und bildeten zusammen mit der Euklidischen Geometrie nahezu das gesamte Gedankengebäude der Physik. Lediglich die Struktur der Atome und die Ausbreitung des Lichtes im leeren Raum konnten damit nicht zufriedenstellend beschrieben werden.

Die physikalische Messtechnik beruhte vor allem auf mechanischen und elektromechanischen Messinstrumenten. Es gab zwar bereits zahlreiche Experimente zur Elektrizitätsleitung in verdünnten Gasen und im Vakuum, die Elektronenröhre als Verstärkerelement sollte aber erst 1904 von Fleming erfunden werden.

Wesentliches Fundament der Deutung der Lichtausbreitung im Vakuum war die „Ätherhypothese“, die ein „Fluidum“ genannt „Äther“ postulierte (nicht zu verwechseln mit der chemischen Verbindung Äther: $C_2H_5-O-C_2H_5$), das den gesamten Raum ausfüllt und in dem sich auch die Himmelskörper wie die Erde oder die Sonne bewegen. Viele Forschungen dieser Zeit hatten das Ziel, diesen nicht-stofflichen „Äther“ nachzuweisen und seine Eigenschaften zu untersuchen. Die Ergebnisse bestimmter Experimente ließen erhebliche Zweifel an der Existenz dieses „Äthers“ aufkommen, doch gab es keine aus der klassischen Physik ableitbaren Erklärungen für das Versagen dieser Hypothese.

Das besondere Verdienst von Albert Einstein liegt in der Veröffentlichung seiner „Speziellen Relativitätstheorie“, mit der er die Existenz eines „Äthers“ überflüssig machte, weil sie in der Lage war, die Ergebnisse der entsprechenden Experimente logisch konsequent und widerspruchsfrei zu begründen. Im Nachhinein erscheint diese Theorie naheliegend, doch aus dem historischen Kontext heraus war sie ein ebenso entscheidender Schritt weg von der Anthropomorphisierung wie die Erkenntnis Galileis, dass sich die Erde um die Sonne dreht und damit den Menschen aus dem Mittelpunkt des Universums rückt.

1.1 Ruhende und bewegte Beobachter

In der klassischen Physik werden Experimente in einem Laborsystem durchgeführt, was in der Regel heißt: in einem Labor, das sich auf der Erdoberfläche befindet. Dies hat zur Folge, dass z.B. die Wirkung der Erdanziehung berücksichtigt werden muss, gleichzeitig vernachlässigt man aber die Rotation der Erde um ihre Polachse, ihre Bewegung um die Sonne, die Bewegung des Sonnensystems um den Kern unserer Galaxis und deren Eigenbewegung in Bezug auf andere Galaxien, weil man annimmt, dass diese sich nicht auf den Ablauf des Experiments auswirken.

Dennoch war natürlich bekannt, dass verschiedene Beobachter unterschiedliche Abläufe beobachten werden, wenn sie sich relativ zueinander bewegen. Lässt man in einem Labor(system) eine Kugel fallen, so führt sie wegen der als konstant anzunehmenden Fallbeschleunigung eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung aus, die zu einer linearen Bewegung in Richtung der Beschleunigung führt (Abb. 1a). Verfrachtet man dagegen das Labor(system) auf einen Eisenbahnwagen, der sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, wird der sich mit dem Wagen im Labor mitbewegende Beobachter etwas anderes wahrnehmen als ein Beobachter, der neben dem Bahngleis steht (Abb. 1b). Noch komplizierter wird es, wenn der Eisenbahnwagen während des Falls der Kugel ausgehend von einer bereits vorhandenen Anfangsgeschwindigkeit selbst beschleunigt: Der Laborbeobachter sieht nun einen anderen Ablauf seines Experimentes, während sich für den Beobachter am Bahngleis nichts ändert (Abb. 1c).

Im Rahmen der klassischen Newtonschen Mechanik lassen sich die Bahnkurven leicht ineinander überführen, dazu verwendet man die sog. Galilei-Transformationen. Bewegt sich in Abb. 1b der Wagen mit der Geschwindigkeit v_L und

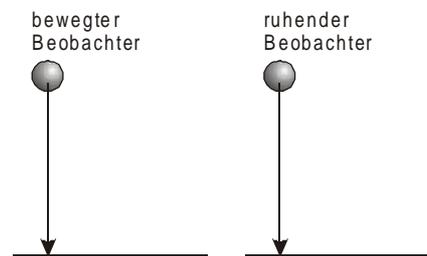


Abb. 1a: Bahnkurve der Kugel bei ruhendem Laborsystem

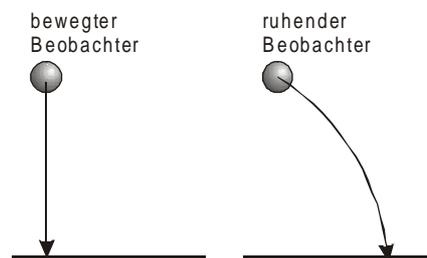


Abb. 1b: Bahnkurve der Kugel bei gleichförmig bewegtem Laborsystem

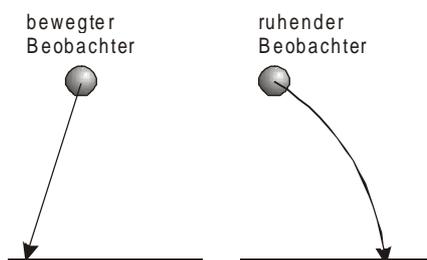


Abb. 1c: Bahnkurve der Kugel bei gleichmäßig beschleunigtem Laborsystem

besitzt die Kugel z.B. in horizontaler Richtung eine Anfangsgeschwindigkeit v_{x0} , so registriert der mit dem Laborsystem mitbewegte Beobachter lediglich v_{x0} , während der ruhende Beobachter die resultierende Geschwindigkeit $v' = v_L + v_{x0}$ beobachtet.

Da die Position des Beobachters für die Wahrnehmung eines Ablaufes eine entscheidende Rolle spielt, muss also deutlich unterschieden werden zwischen dem *ruhenden Beobachter*, in dessen Laborsystem sich das Laborsystem des bewegten Beobachters bewegt, und dem *bewegten Beobachter*, der innerhalb des bewegten Laborsystems seinerseits aber ruht..

1.2 1. Einsteinsches Postulat: Inertialsysteme

Die Abb. 1a und 1b zeigen, dass bei einem ruhenden oder gleichförmig bewegtem Laborsystem der bewegte Beobachter keinen Unterschied im Ablauf seines Experimentes feststellen kann, er prinzipiell also auch nicht feststellen kann, ob er sich mit seinem Laborsystem in Ruhe befindet oder sich dieses mit konstanter Geschwindigkeit durch den Raum bewegt. Derartige Laborsysteme bezeichnet Einstein als *Inertialsysteme* (inert: fest, unveränderlich):

In einem Inertialsystem nehmen die Naturgesetze immer die gleiche Form an.

Das gleichmäßig beschleunigte Laborsystem nach Abb. 1c ist *kein* Inertialsystem, da sich hier die Bahnkurve für den mitbewegten Beobachter signifikant von den vorherigen unterscheidet, außerdem kann er selbst feststellen, dass er eine beschleunigte Bewegung ausführt, weil zusätzliche Kräfte auf ihn ausgeübt werden. Dies gilt nicht nur für gleichmäßig beschleunigte, sondern auch für rotierende oder beliebig anders beschleunigte Systeme.

1.3 2. Einsteinsches Postulat: Invarianz der Lichtgeschwindigkeit

Die Geschwindigkeit des Lichtes wurde bereits lange vor Einstein durch sinnreiche Experimente bestimmt. Olaf Römer (1644 - 1710) hat 1676 anhand des Zeitpunktes des Eintritts eines Jupitermondes in den Jupiterschatten bei verschiedenen Entfernungen des Jupiters von der Erde einen ersten Wert von 214 300 km/s bestimmt. 1849 gelang Fizeau (1819 - 1896) auf der Erde mit einer Messstrecke von gerade mal 8633 m die Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit auf 315 300 km/s mit einer Apparatur, bei der ein rotierendes Zahnrad den ausfallenden und den reflektierten Lichtstrahl periodisch unterbrach. Eine Weiterentwicklung dieses Prinzips mit rotierenden Spiegeln durch Michelson und Morley lieferte einen Wert von 299 796 km/s, und heutige Messungen unter Verwendung von Mikrowellen ergeben 299 792,5 km/s.

Michelson und Morley gingen bei ihren Experimenten immer noch davon aus, dass ein „Äther“ für die Ausbreitung des Lichtes im Vakuum verantwortlich ist. Ihr auf Interferenz von Lichtstrahlen beruhender Aufbau verwendet zwei gleich lange Lichtwege, die senkrecht zueinander stehen (siehe Abb. 2). Wenn die Spiegel exakt ausgerichtet sind, sieht man im Okular eine ringförmige Interferenzstruktur. Verändert man die Länge oder die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes in einem der beiden Lichtwege, scheinen weitere Ringe aus dem Zentrum der Interferenzstruktur herauszuquellen oder in ihm zu verschwinden. Wenn sich nun dieser Aufbau zusammen mit der Erde durch diesen „Äther“ bewegt, sollte das Licht in dem parallel zur Bewegung ausgerichteten Lichtweg eine andere Geschwindigkeit aufweisen als im senkrecht stehenden. Die Bahngeschwindigkeit der Erde ist mit 3,06 km/s hinreichend groß, dass sich ein beobachtbarer Effekt hätte ergeben müssen, was jedoch nicht der Fall war. Während Michelson und Morley einen Fehler in ihrer Messanordnung vermuteten, zog Einstein einen anderen Schluss. In Konsequenz seiner Definition eines Inertialsystems müsste sich das Licht in jedem Inertialsystem in allen Richtungen gleichschnell ausbreiten:

Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum hat in jedem Inertialsystem den selben Wert von 299 793 km/s.

Diese Konstanz der Lichtgeschwindigkeit wird häufig auch als *Invarianz der Lichtgeschwindigkeit* bezeichnet. Hiermit wird zwar das Experiment von Michelson und Morley nicht widerlegt, entsprechend den Prinzipien der Heuristik macht dieses Postulat aber die Existenz eines „Äthers“ überflüssig, weil es mit dem Ergebnis des Experimentes in Einklang steht.

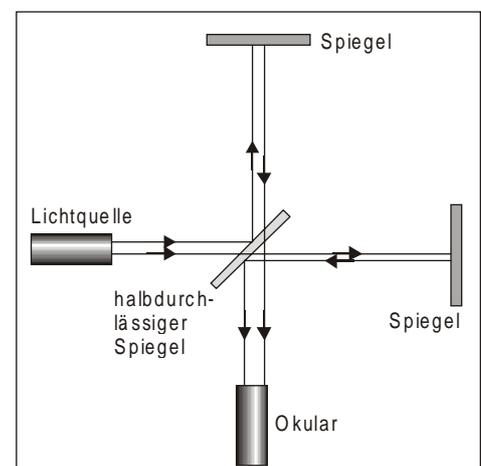


Abb. 2: Versuchsaufbau von Michelson und Morley 1886 (die Lichtwege sind zur besseren Verdeutlichung nebeneinander gezeichnet).

1.4 Folgerungen aus den Einsteinschen Postulaten

So einfach die Aussagen der beiden Postulate auch scheinen mögen, lassen sie sich nicht zwingend aus irgendwelchen Beobachtungen folgern (sonst wären es keine Postulate). Als Fundament einer Theorie muss sich aber erweisen, dass durch die Folgerungen aus ihnen (*deduktive* Methode) keine Widersprüche zu irgendwelchen tatsächlichen Beobachtungen auftreten.

Damit die Unterschiede zwischen den Wahrnehmungen eines ruhenden und eines bewegten Beobachters eines bestimmten Experimentes deutlich werden, muss das bewegte System sich mit einer Geschwindigkeit bewegen, die einen nennenswerten Bruchteil der Lichtgeschwindigkeit ausmacht, andernfalls werden die Differenzen so klein ausfallen, dass sie sich einer Messung entziehen. Hier greift man deshalb zunächst auf Gedankenexperimente zurück, die sich bei entsprechend entwickelter Messtechnik dann auch real durchführen lassen (deswegen hat es bis in die 50-er Jahre des 20. Jahrhunderts gedauert, dass die Folgerungen aus der 1905 veröffentlichten Theorie auch experimentell bestätigt werden konnten).

1.4.1 Zeitdilatation

Ein grundlegendes Gedankenexperiment ist die sogenannte *Lichtuhr* (Abb. 3). In ihr wird ein Lichtstrahl zwischen zwei parallelen Spiegeln hin- und her reflektiert. Beträgt der Abstand zwischen den Spiegeln knapp 299 793 km, so dauert es genau 1 s, bis der Lichtstrahl die Uhr durchlaufen hat. Diese Strecke nennt man deswegen auch 1 Ls (Lichtsekunde).

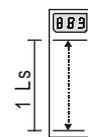


Abb. 3: Lichtuhr

Damit ein ruhender und ein bewegter Beobachter ihre Beobachtungen vergleichen können, werden zwei Uhren benötigt. Vor Beginn des Versuches müssen diese Uhren synchronisiert werden, damit sie exakt im Gleichtakt laufen. Dazu platziert man genau in der geometrischen Mitte zwischen den beiden Uhren eine Lichtquelle, die einen kurzen Lichtimpuls aussendet. Trifft dieser bei den Uhren ein, werden sie jeweils gestartet. Dieses Prinzip nennt man *Einstein-Synchronisation* (vergl. Abb. 4).

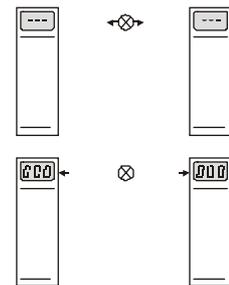


Abb. 4: Synchronisation zweier Lichtuhren

In leicht abgewandelter Form wird dieses Prinzip auch zur Synchronisation von Atomuhren auf der ganzen Welt eingesetzt. Hier sendet die zu synchronisierende Uhr ein Funksignal an eine bereits synchronisierte Uhr aus, die sofort seinerseits ein Signal zurücksendet. Die Signallaufzeit ergibt sich aus der Hälfte der zwischen Aussenden und Empfangen vergangenen Zeitdifferenz und wird nun beim Stellen der Uhr berücksichtigt.

Nach erfolgter Synchronisation wird nun eine Uhr auf die Geschwindigkeit v beschleunigt und „fliegt“ so an dem ruhenden Beobachter vorbei. Für den mitbewegten Beobachter hat sich nichts am Gangverhalten der Uhr geändert, da sie sich in einem Inertialsystem befindet. Für den ruhenden Beobachter legt das Licht in der bewegten Uhr nun aber eine größere Strecke zurück, bis es vollständig die Uhr durchlaufen hat, als bei seiner eigenen (Abb. 5). Nach dem 2. Postulat müssen aber beide Beobachter ein und dieselbe Lichtgeschwindigkeit messen, was hier zu einem scheinbaren Widerspruch führt.

Sichtweise des bewegten Beobachters für seine Uhr:

Das Licht hat die Strecke $s = 1 \text{ Ls}$ mit der Geschwindigkeit $c = 2,997 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ zurückgelegt. Dafür hat es die Zeit

$$t = \frac{s}{c}$$

benötigt.

Sichtweise des ruhenden Beobachters für die bewegte Uhr:

Das Licht hat die Strecke $s' > s$ mit der Geschwindigkeit $c = 2,997 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ zurückgelegt. Dafür hat es die Zeit

$$t' = \frac{s'}{c}$$

benötigt, wobei die Zeit t' größer ist als t .

Da es sich für beide Beobachter um ein und den selben Prozess handelt, stellt der ruhende Beobachter also fest:

Die Zeit in einem bewegten System vergeht langsamer als in einem ruhenden System.

Dies bezeichnet man als *Zeitdilatation* (von lat. dilatare: dehnen).

1.4.1.1 Die Geometrie der Zeitdilatation

Um die Zeit t' zu bestimmen, die der ruhende Beobachter wahrnimmt, genügt eine einfache geometrische Überlegung. Die Abb. 5 zeigt die Lichtwege, die aus Sicht des bewegten und des ruhenden Beobachters zurückgelegt werden, wenn sich das System mit der Geschwindigkeit v bewegt. Hierin ist s der Weg des Lichtstrahls aus Sicht des bewegten und s' der Weg aus Sicht des ruhenden Beobachters, außerdem legt das System in der Zeit t' mit der Geschwindigkeit v den Weg s_v zurück. Es gelten somit die Beziehungen:

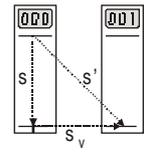


Abb. 5: Lichtwege beider Beobachter

$$s = c \cdot t \quad (1a)$$

$$s' = c \cdot t' \quad (1b)$$

$$s_v = v \cdot t' \quad (1c)$$

Für den bewegten Beobachter ist $t = 1$ s, für die Zeit t' erhält man über den Satz des Pythagoras

$$(c \cdot t')^2 = (c \cdot t)^2 + (v \cdot t')^2 \quad \Rightarrow \quad (c \cdot t)^2 = (c \cdot t')^2 - (v \cdot t')^2 \quad \Rightarrow \quad t^2 = t'^2 \cdot \frac{c^2 - v^2}{c^2} = t'^2 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

Aufgelöst nach t erhält man

$$t = t' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (2)$$

Für $v = 0$ stimmt t mit t' überein, während für $v > 0$ die Wurzel einen Wert kleiner als Eins annimmt, also ist t immer kleiner als t' , die im bewegten System vergangene Zeit t ist also immer kleiner als die im ruhenden System vergangene Zeit t' .

Glg. (2) kann man ebenfalls entnehmen, dass eine Geschwindigkeit $v > c$ nicht möglich ist, weil dann die Wurzel nicht mehr definiert ist. Die Lichtgeschwindigkeit c ist somit gleichzeitig die größte Geschwindigkeit, mit der sich ein Objekt im Raum bewegen kann.

1.4.1.2 Zeitdilatation bei Myonen

Myonen sind sehr schnelle Elementarteilchen, die unter anderem durch kosmische Strahlung in großen Höhen (ca. 20 km) unserer Atmosphäre erzeugt werden. Diese Teilchen sind instabil und haben eine Halbwertszeit von 1,52 μ s.

Um mit nahezu Lichtgeschwindigkeit diese Strecke von 20 km zurückzulegen, benötigen sie aus Sicht eines ruhenden Beobachters auf der Erdoberfläche die Zeit

$$t' = \frac{s}{c} = \frac{2,00 \cdot 10^4 \text{ m}}{2,997 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 66,7 \mu\text{s}$$

entsprechend 44 Halbwertszeiten. Dies würde bedeuten, dass praktisch keine Myonen mehr auf der Erdoberfläche ankommen würden. Tatsächlich ist es aber so, dass etwa 4 % der erzeugten Myonen ankommen, was bedeutet, dass in ihrem (bewegten) System gerade mal vier bis fünf Halbwertszeiten, also ca. 7 μ s vergangen ist, es gilt also $t = 7 \mu$ s. Da somit t und t' bekannt sind, kann man die Geschwindigkeit der Myonen bestimmen. Aus Glg. (2) erhält man durch Auflösen nach v

$$v = c \cdot \sqrt{1 - \frac{t^2}{t'^2}} = c \cdot \sqrt{1 - \frac{(7 \cdot 10^{-6} \text{ s})^2}{(66,7 \cdot 10^{-6} \text{ s})^2}} = 0,9945 \cdot c$$

die Myonen kommen also bis auf 1/200 an die Lichtgeschwindigkeit heran.

1.4.2 Längenkontraktion

Das Beispiel mit den Myonen wirft aber eine weitere Frage auf: In der Halbwertszeit der Myonen von 1,52 μ s legen diese einen Weg von

$$s = v \cdot t = 0,9945 \cdot 2,997 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1,52 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 453 \text{ m}$$

zurück. Selbst nach 5 Halbwertszeiten haben sie erst knapp 2,5 km von den 20 km zurückgelegt, würden also nicht in dieser Zahl auf dem Erdboden ankommen können, wie es tatsächlich der Fall ist. Damit 4 % der Myonen den Erdboden erreichen, kann die Strecke von ihrem Entstehen bis zum Aufprall aus ihrer Sicht also nicht länger als 2,5 km sein.

1.4.2.1 Herleitung der Längenkontraktion aus der Zeitdilatation

Der im ruhenden System zurückgelegte Weg berechnet sich analog nach (1b) zu

$$s' = v \cdot t' \quad \Rightarrow \quad t' = \frac{s'}{v}$$

während im bewegten System entsprechend nach (1a) gilt:

$$s = v \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{s}{v}$$

Setzt man diese Terme in Glg. (2) ein, so erhält man nach Kürzen von v

$$s = s' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (3)$$

Auch hier ist die im bewegten System gemessene Strecke s immer kleiner als s' im ruhenden System, das heißt:

Die im ruhenden System zurückgelegte Strecke ist für den bewegten Beobachter verkürzt.

Diese Verkürzung von Strecken in Richtung der Bewegung bezeichnet man als *Längenkontraktion* (lat. contrahere: verkürzen).

1.4.2.2 Längenkontraktion bei Myonen

Die Myonen aus 1.4.1.2 haben im Ruhsystem eine Strecke von s' = 20 km zurückzulegen. Mit der bekannten Geschwindigkeit v = 0,9945 · c erhält man aus Glg. (3) für die von ihnen gemessene Strecke

$$s = s' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 20 \text{ km} \cdot \sqrt{1 - \frac{(0,9945 \cdot c)^2}{c^2}} = 20 \text{ km} \cdot \sqrt{1 - 0,9945^2} = 2,09 \text{ km}$$

die somit tatsächlich etwa in der Größenordnung liegt, die sie in 4 bis 5 Halbwertszeiten zurücklegen können.

1.4.3 Relativistische Masse

Wenn für einen ruhenden Beobachter die Zeit in einem bewegten System langsamer vergeht, so nimmt er bei sich bewegenden Objekten innerhalb des bewegten Systems eine kleinere Geschwindigkeit wahr als der bewegte Beobachter. Trifft z.B. ein Objekt mit der Geschwindigkeit v auf eine Feder, so wird diese zusammengepresst. Die Verformung ist dabei um so größer, je größer die Masse m und die Aufprallgeschwindigkeit v₀ des Objektes sind. Die Verformung der Feder ist also proportional zum Impuls p des Objektes, also dem Produkt von m und v₀.

Im bewegten System gilt somit für den Impuls

$$p = m \cdot v_0 \quad (4a)$$

Aus Sicht des ruhenden Systems ist die Geschwindigkeit des Objektes wegen der Zeitdilatation geringer:

$$p' = m \cdot v'_0 \quad (4b)$$

Da die Wirkung auf die Feder aber die gleiche ist, gilt für die beiden Impulse

$$p' = p \quad (4c)$$

Setzt man (4a) und (4b) in (4c) ein, erhält man

$$m \cdot v_0 = m' \cdot v'_0$$

was bedeuten würde, dass die beiden Geschwindigkeiten gleich sein müssen, was aber nicht möglich ist. Folglich muss Glg. (4b) korrigiert werden, damit auch die Masse für den ruhenden Beobachter eine Veränderung erfährt:

$$p' = m' \cdot v'_0 \quad (4b')$$

Die Messvorschrift zum Bestimmen der Geschwindigkeit v₀ ergibt sich zu

$$v = \frac{s}{t} \quad (5)$$

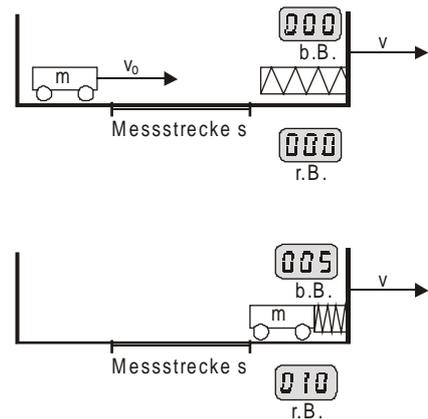


Abb. 6: Verformung einer Feder durch den Aufprall einer Masse m. (b.B.: bewegter Beobachter, r.B.: ruhender Beobachter)

wobei s sowohl im ruhenden als auch im bewegten System gleich groß sind. Allerdings nehmen beide Beobachter nach Kap. 1.4.1 unterschiedliche Zeiten wahr, aus denen sich die zwei verschiedenen Geschwindigkeiten bestimmen lassen.

Die Gleichheit der Impulse p und p' führt nun zu dem Term

$$m \cdot v_0 = m' \cdot v'_0 \quad \Rightarrow \quad m' = m \cdot \frac{v_0}{v'_0} \quad (6)$$

Ersetzt man die Geschwindigkeiten nach Glg. (5), so erhält man nach Kürzen der in beiden Systemen jeweils gleichen Messstrecke s

$$m' = m \cdot \frac{t'}{t} \quad (7)$$

woraus sich unter Berücksichtigung von Glg. (2) ergibt:

$$m' = m \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (8)$$

Die von einem ruhenden Beobachter im bewegten System gemessene Masse m' ist also immer größer als die Masse m im bewegten System.

Die Masse m in einem ruhenden Inertialsystem wird auch als *Ruhemasse* m_0 bezeichnet, während die von einem ruhenden Beobachter in einem bewegten System beobachtete (und gegenüber der Ruhemasse größere) Masse als *relativistische Masse* m_R bezeichnet wird.

Die relativistische Masse m_R in einem bewegten System ist größer als seine Ruhemasse m_0 .

Glg. (8) kann man entnehmen, dass die relativistische Masse gegen Unendlich geht, wenn v gegen c geht. Um die Geschwindigkeit eines Körpers zu erhöhen, muss für seine Beschleunigung eine Kraft aufgewendet werden. Je größer die Masse ist, desto geringer ist (bei gleicher Kraft) der Geschwindigkeitszuwachs, dies erklärt, warum kein massebehaftetes Objekt jemals auf Lichtgeschwindigkeit beschleunigt werden kann. Es gilt also

Kein mit einer Ruhemasse behaftetes Objekt kann sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen.

Neutrinos entstehen bei allen Kernprozessen, so z.B. auch bei der Wasserstoff-Fusion im Inneren einer Sonne. Lange Zeit konnte nicht entschieden werden, ob Neutrinos eine Ruhemasse haben oder eher mit Licht zu vergleichen sind. Bei einer Supernova-Explosion in der Magellanschen Wolke (ein Sternhaufen, der in 50 000 Lj Entfernung unsere Galaxis begleitet) wurden sowohl ein sehr heller Lichtblitz als auch eine große Menge Neutrinos gleichzeitig erzeugt. Das Licht benötigte für diese Strecke 50 000 Jahre, bis es auf der Erde ankam, die Neutrinos trafen jedoch 3 Stunden später ein. Damit war nachgewiesen, dass Neutrinos eine (wenn auch äußerst geringe) Ruhemasse besitzen.

1.5 Die Äquivalenz von Masse und Energie

In der klassischen Physik ordnet man einer bewegten Masse eine kinetische Energie zu, für die gilt:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \quad (9)$$

Nach Kap. 1.4 nimmt dagegen die Masse eines bewegten Körpers mit der Geschwindigkeit zu und tritt als relativistische Masse in Erscheinung. Es liegt nahe, die relativistische Massenzunahme und die klassische kinetische Energie in Beziehung zu setzen.

Betrachtet man die sich ergebende Massendifferenz $\Delta m = m_R - m_0$ unter Berücksichtigung von Glg. (8), so erhält man

$$\Delta m = m_R - m_0 = m_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 = m_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \quad (10)$$

Um Glg. (10) mit den Aussagen aus der klassischen Physik vergleichen zu können, betrachtet man den Fall, dass $v \ll c$ ist. Dann kann man den Wurzelterm in Nenner durch eine Potenzreihe ersetzen, was die Darstellung erheblich vereinfacht.

Für einen Wurzelterm in der hier auftretenden Form gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \dots \quad \text{mit der Bedingung } |x| \leq 1$$

Ist $x \ll 1$, so kann man die höheren Potenzen vernachlässigen, und man erhält die Näherung

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \cong 1 + \frac{1}{2}x \quad \text{mit der Bedingung } |x| \ll 1$$

Ersetzt man in Glg. (10) den Klammerausdruck durch diese Näherung, ergibt sich mit $x = \frac{v^2}{c^2}$

$$\Delta m = m_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} - 1 \right) = m_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} = E_{\text{kin}} \cdot \frac{1}{c^2} \quad (11)$$

Erweitert man Glg. (11) mit c^2 , so erhält man für die (klassische) kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \Delta m \cdot c^2 \quad (12)$$

Für kleine Geschwindigkeiten v im Vergleich zu c geht die relativistische Mechanik also über in die bisherige klassische Form. Bei großen Geschwindigkeiten darf zwar die Näherung nicht mehr benutzt werden, Glg. (12) gilt aber weiterhin für die kinetische Energie einer bewegten Masse

Verwendet man den ersten Teil von Glg. (10), so erhält man nach Glg. (12) und Umstellen der Summanden

$$E_{\text{kin}} = (m_R - m_0) \cdot c^2 = m_R \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2 \quad \Rightarrow \quad m_R \cdot c^2 = m_0 \cdot c^2 + E_{\text{kin}} \quad (13)$$

Die drei Summanden stellen Energien dar, und es liegt nahe, den Term $m_0 \cdot c^2$ als Ruheenergie und $m_R \cdot c^2$ als Gesamtenergie der bewegten Masse aufzufassen. Dies führt zum Prinzip der Äquivalenz von Masse und Energie:

Die Gesamtenergie E eines bewegten Körpers der Masse m ergibt sich zu $E_R = m_R \cdot c^2$

Ein ruhender Körper der Masse m hat die Ruheenergie $E_0 = m_0 \cdot c^2$.

Die Gesamtenergie eines bewegten Körpers setzt sich zusammen aus $E_R = E_0 + E_{\text{kin}}$.

Hiermit verschmelzen die beiden klassischen Erhaltungssätze für Masse und Energie zu dem Erhaltungssatz der relativistischen (dynamischen) Masse.

1.5.1 Konsequenzen aus dem relativistischen Erhaltungssatz

Wurden in der klassischen Physik Massen und ihre Energien noch getrennt betrachtet, ist dies in der relativistischen Mechanik nicht mehr möglich. Lavoisier hatte nachgewiesen, dass bei der Verbrennung einer Kerze in einem abgeschlossenen Raum keine Masse verloren geht (vergl. Abb. 7), sondern lediglich in andere chemische Verbindungen überführt wird, wobei die Gesamtmasse aber erhalten bleibt. Die freigesetzte Energie in Form von Licht und Wärme wurde auf unterschiedliche Bindungsenergien der Edukte zurückgeführt. Wenn Licht und Wärme, also Energie durch den Glaszylinder in den umgebenden Raum abgegeben werden, muss in Konsequenz aus dem relativistischen Erhaltungssatz tatsächlich der rechte Behälter etwas leichter geworden sein. (Man muss Lavoisier allerdings zugute halten, dass seine Waage dafür nicht empfindlich genug gewesen ist.)

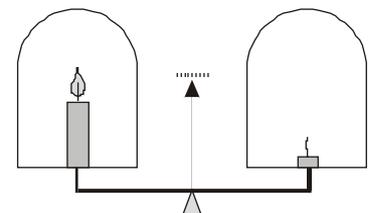


Abb. 7: Schematische Darstellung des Experimentes von Lavoisier

Experimente in Teilchenbeschleunigern haben gezeigt, dass sogar neue Masse entstehen kann. Lässt man zwei sehr schnelle Protonen kollidieren, kann es zu einem Prozess kommen, bei dem die Protonen stark abgebremst werden, dafür entsteht aber ein neues Teilchen - ein Meson - mit eigener Masse (vergl. Abb. 8). Die ursprüngliche kinetische Energie der Protonen wird bei diesem Prozess also in Masse umgewandelt.

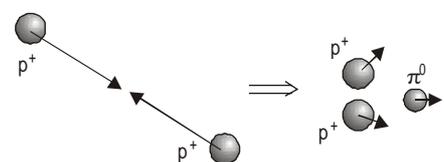


Abb. 8: Entstehung eines π^0 -Mesons durch Kollision zweier schneller Protonen

1.5.1.1 Relativistische Masse von Myonen

Die bereits mehrfach als Beispiel herangezogenen Myonen bewegen sich mit einer Geschwindigkeit von $0,9945 \cdot c$. Ihre Ruhemasse beträgt ca. $1,885 \cdot 10^{-28}$ kg, damit haben sie etwa die 207-fache Masse eines Elektrons. Wegen der hohen Geschwindigkeit haben sie eine deutlich vergrößerte relativistische Masse, nach Glg. (8) erhält man

$$m_R = m_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1,885 \cdot 10^{-28} \text{ kg} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,9945 \cdot c)^2}{c^2}}} = 1,800 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

ihre Masse hat sich also auf das 10-fache erhöht und übersteigt damit sogar die eines Protons. Nach klassischem Ansatz erhielte man für die Myonen die kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_0 \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,885 \cdot 10^{-28} \text{ kg} \cdot \left(0,9945 \cdot 2,997 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 = 8,373 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

nach relativistischem Ansatz ergibt sie sich aus Glg. (13) mit

$$E_{\text{kin}} = (m_R - m_0) \cdot c^2 = (1,800 \cdot 10^{-28} \text{ kg} - 1,885 \cdot 10^{-28} \text{ kg}) \cdot \left(2,997 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 = 1,447 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

ein etwa 17 Mal größerer Wert als nach klassischem Ansatz, was typisch ist bei sehr hohen Geschwindigkeiten, weil hier eben die Näherung nach Kap. 1.5 nicht mehr angewendet werden darf.

1.5.1.2 Massen und Energien im Vergleich

Bei der Verbrennung von 1 g Wasserstoff entsteht eine Energie von ca. 286 KJ. Würde man dagegen die Ruhemasse vollständig in Energie umwandeln, erhält man dagegen

$$E_0 = m_0 \cdot c^2 = 0,001 \text{ kg} \cdot \left(2,997 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 = 8,98 \cdot 10^{11} \text{ KJ}$$

die so freigesetzte Energie ist also ca. 300 Millionen mal größer als die bei der chemischen Reaktion auftretende Energie. Um die gleiche Energiemenge durch eine chemische Verbrennung zu erhalten, würde man einen Würfel von knapp 700 m Kantenlänge, gefüllt mit Wasserstoff, benötigen.

Bei dem Experiment von Lavoisier wurden etwa 100 g der Kerze verbrannt, dabei hätte sich eine Gewichts-differenz zwischen den beiden Waagschalen von $3,3 \cdot 10^{-7}$ g bzw. $0,33 \mu\text{g}$ ergeben, was weit unterhalb seiner Messgenauigkeit gelegen hat.

Wird ein Elektron in einer Vakuumröhre mit einer Spannung von 50 000 V beschleunigt, vergrößert sich seine kinetische Energie und es gilt:

$$E_{\text{kin}} = e \cdot U$$

Nach klassischem Ansatz erhält man für die Geschwindigkeit

$$E_{\text{kin}} = e \cdot U = \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2 \cdot \frac{e}{m_e} \cdot U} = 1,326 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,442 \cdot c$$

Nach relativistischem Ansatz gilt aber nach Kap. 1.5 unter Verwendung von $E_0 = m_0 \cdot c^2$

$$E_{\text{kin}} = e \cdot U = E_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \Rightarrow \frac{1}{\frac{E_{\text{kin}}}{E_0} + 1} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \left(\frac{E_0}{E_{\text{kin}} + E_0} \right)^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow v = c \cdot \sqrt{1 - \frac{E_0^2}{(E_{\text{kin}} + E_0)^2}}$$

$E_0 = m_{e0} \cdot c^2$ ist hierbei die Ruheenergie eines Elektrons und beträgt $E_0 = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (2,997 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 = 8,182 \cdot 10^{-14} \text{ J}$. Man erhält somit

$$v = c \cdot \sqrt{1 - \frac{(m_{e0} \cdot c^2)^2}{(e \cdot U + m_{e0} \cdot c^2)^2}} = 2,997 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sqrt{1 - \frac{(8,182 \cdot 10^{-14} \text{ J})^2}{(1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 5 \cdot 10^5 \text{ V} + 8,182 \cdot 10^{-14} \text{ J})^2}} = 1,237 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,413 \cdot c$$

Somit ist die relativistisch bestimmte Geschwindigkeit der Elektronen bereits um 7 % kleiner als die klassisch bestimmte.

2 Quantenobjekte

Beim Übergang von der klassischen zur relativistischen Mechanik spielt die Lichtgeschwindigkeit eine entscheidende Rolle. Da in den Experimenten bis zur Wende vom 19. zum 20. Jahrhundert sich die Objekte lediglich mit Geschwindigkeiten weit unter der des Lichtes bewegten, genügten die Newtonschen Gesetze zur Beschreibung der Beobachtungen, ein relativistischer Einfluss auf Zeiten, Strecken und Massen lag weit unterhalb jeglicher Nachweisgrenzen.

Ähnliches gilt für die Größe der Objekte. Eine Vorstellung vom Bau der Atome befand sich erst in den allerersten Anfängen, und die minimale Größe der experimentell untersuchten Objekte wurde durch das begrenzte Auflösungsvermögen von Lichtmikroskopen auf ca. $0,5 \mu\text{m}$ beschränkt. Unabhängig davon wurden natürlich zahlreiche Experimente durchgeführt, bei denen - aus unserer heutigen Kenntnis der Dinge - erheblich kleinere Objekte für die Phänomene verantwortlich sind, dazu zählen z.B. die Versuche zur Entstehung und Leitung von Elektrizität, Untersuchungen an Gasen usw. Die Erkenntnisse der Wissenschaftler stützten sich dabei aber vornehmlich auf tatsächlich mit dem Auge beobachtbare Dinge, alles unterhalb dieser Größenskala blieb weitgehend spekulativ.

Die konsequente Entwicklung der Naturwissenschaft von einer Wissenschaft der Natur zu einem theoretischen Wissenschaftskonstrukt hatte sich zu Beginn des 20. Jahrhunderts so weit entwickelt, dass Forscher zunehmend bereit waren, fundierte Hypothesen zu besonderen, sich bislang einer Erklärung entziehenden Beobachtungen aufzustellen und diese vor allem nun mit gezielten Experimenten in eine tragfähige Theorie zu überführen. Dabei drangen sie zunehmend in einen Bereich ein, der von Lichtmikroskopen nicht mehr erfasst werden konnte, was letztendlich unser bis dahin mechanistisches Weltbild erheblich verändern sollte. Wir sprechen heute zwar mit großer Selbstverständlichkeit von Elektronen, man muss sich aber immer wieder vor Augen halten, dass bis heute niemand jemals ein Elektron „gesehen“ hat - da das Elektron als Konzept sich aber hervorragend bewährt hat, ist es in den meisten Kontexten durchaus sinnvoll, seine Existenz als gegeben anzunehmen.

2.1 Welle-Teilchen-Dualismus

Bereits Huygens hat für die Ausbreitung von Licht und die dabei möglichen Phänomene wie Beugung und Interferenz eine tragfähige Modellvorstellung entwickelt, die sich ebenso auf mechanische (z.B. Wellen auf einer Wasseroberfläche) wie auf elektromagnetische Wellen (Licht) anwenden lässt und eindeutige Vorhersagen erlaubt. In der Eingängigkeit dieses Modells steckt aber auch eine Tücke: selbstverständlich gehen wir bei einer Welle auf einem See davon aus, dass sie um so mehr Energie besitzt, je höher die Welle ist. Betrachtet man nun aber einen Deich, der diese Wellen aushalten muss, so stellt man fest, dass zwar eine einzige Welle großer Höhe diesen Deich zerstören kann, aber eine beliebige Anzahl kleiner Wellen dem Deich (abgesehen von Ermüdungserscheinungen) nichts anhaben wird, obwohl die Gesamtenergie der vielen kleinen Wellen sicherlich beliebig viel größer sein kann als die einer einzelnen Welle. Erst, wenn sich durch konstruktive Interferenz diese vielen kleinen Wellen zu einer großen aufsummieren, ist eine Zerstörung des Deiches denkbar.

Die Kombination der Wellenoptik mit der Elektrizitätslehre, die im ausgehenden 19. Jahrhundert zunehmend Ziel naturwissenschaftlicher Forschung wurde, zeigte aber, dass dieses mechanische Wellenmodell sich nicht widerspruchsfrei auf Licht übertragen ließ. Die oben erwähnte Entwicklung von Hypothesen zur Quantentheorie, mit denen ein Verständnis für die zugrunde liegenden Gesetzmäßigkeiten dieser Experimente geschaffen wurde, ließ dann auch bis in die 50-er Jahre viele Physiker zweifeln, und selbst Einstein hat sich zeit seines Lebens nicht mit ihnen anfreunden können: „Gott würfelt nicht!“. Die zentralen Experimente, die zum Quantenbegriff führten, werden in den folgenden Kapiteln näher erläutert.

2.1.1 Fotoeffekt: Photonen als Quantenobjekte

Anfang des 19. Jahrhunderts war es möglich, chemische Emulsionen herzustellen, die sich unter der Einwirkung von Licht veränderten, was die Entwicklung der Photographie ermöglichte. Damit war eine Möglichkeit gefunden, auch optische Experimente zu verfeinern, bei denen lediglich geringste Lichtmengen nachgewiesen werden sollten, die mit dem bloßen Auge nicht mehr wahrgenommen werden konnten. Der Nachteil dieses Verfahrens war allerdings der recht große chemische Aufwand, der zur Herstellung und Entwicklung der entsprechenden Photoplatten, später auch Filme, notwendig war. Schon länger war aus Versuchen zur Elektrostatik bekannt, dass eine geladene Metallplatte sich schneller entlädt, wenn man sie mit Licht beleuchtet, was auf das Herauslösen von Ladungsträgern aus der Metalloberfläche zurückgeführt wurde.

Eine erhebliche Steigerung der Lichtempfindlichkeit ergab sich, wenn man besondere metallische Verbindungen (wie z.B. Zinksulfid) verwendete und die so beschichtete Platte mit einer Gegenelektrode zum Auffangen der ausgelösten Ladungsträger in eine evakuierte Glasröhre einschloss (vergl. Abb. 9). Analog zur bereits bekannten Gleichrichterröhre, wobei die Elektronen allerdings aus einer Glühkathode emittiert wurden, bezeichnet man diese Konstruktion als *Photodiode*. Ihr eindeutiger Vorteil gegenüber den Photoplatten war ihre unmittelbare Reaktion auf einfallendes Licht durch einen Stromfluss zwischen Kathode und Anode, wobei die damals bereits gut bekannte Galvanometertechnik eine durchaus ansehnliche Nachweisempfindlichkeit bewirkte.

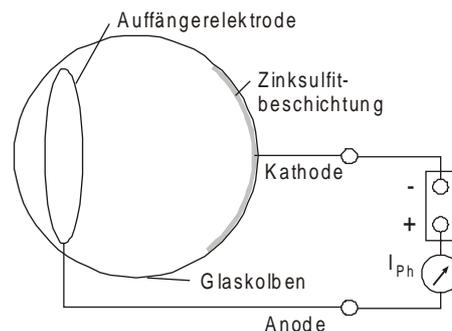


Abb. 9: Aufbau einer Vakuum-Photozelle

Dazu wurde eine Spannungsquelle mit dem Pluspol an die Anode angeschlossen und der Strom zwischen Kathode und Minuspol der Spannungsquelle gemessen. Bei hinreichend hoher Spannung der Spannungsquelle ist in dieser Beschaltung der Photostrom proportional zur Intensität des einfallenden Lichtes.

Die Strommessung allein gibt allerdings keinen Aufschluss über die Frage, ob der bei zunehmender Lichtintensität größere Strom auf eine größere Anzahl ausgelöster Elektronen oder eine höhere Geschwindigkeit der Elektronen zurückzuführen ist. Beschaltet man die Photodiode jedoch wie in Abb. 10, bewegen sich bei Lichteinfall die ausgelösten Elektronen zur Auffängerelektrode, von der sie jedoch nicht abfließen können (durch ein statisches Voltmeter fließt kein Strom). Dadurch lädt sich die Anode negativ auf und es entwickelt sich ein elektrisches Feld zwischen Kathode und Anode, gegen das die weiteren ausgelösten Elektronen „anlaufen“ müssen. Somit erreichen nur noch diejenigen Elektronen die Anode, deren Geschwindigkeit groß genug ist, um die Abbremsung im elektrischen Feld zu überwinden (*Gegenfeldmethode*).

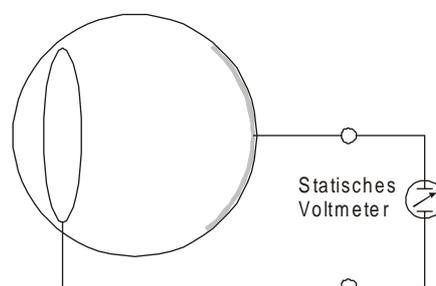


Abb. 10: Photodiode mit statischem Voltmeter (*Gegenfeldmethode*)

Das Ergebnis dieses Experimentes war allerdings für die damalige Zeit sehr verblüffend: Beleuchtet man die Photozelle mit einer weißen Lichtquelle (z.B. einer Bogenlampe), deren Helligkeit durch eine Irisblende reguliert werden kann, stellt sich eine bestimmte Spannung ein, die sich mit der Intensität des Lichtes nicht (bzw. lediglich geringfügig) ändert (vergl. Abb. 11). Dies lässt darauf schließen, dass die Elektronen *unabhängig von der Intensität* mit immer der gleichen (Maximal-) Geschwindigkeit aus der Kathode ausgelöst werden. Folglich wird mit einer Vergrößerung der Lichtintensität lediglich die Anzahl der ausgelösten Elektronen vergrößert.

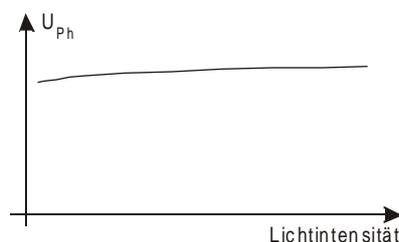


Abb. 11: Photospannung als Funktion der Lichtintensität bei der *Gegenfeldmethode* (weißes Licht)

Filtert man aus dem weißen Licht eine einzige Farbe heraus (durch ein Prisma oder durch ein Gitter) und beleuchtet mit diesem nun monochromatischen Licht die Photozelle, reagiert die Photozelle auf Änderungen der Intensität nach wie vor wie nach Abb. 11, allerdings stellen sich je nach Farbe des Lichtes unterschiedliche Gegenspannungen ein (vergl. Abb. 12). Je nach verwendetem Kathodenmaterial stellen sich bei gleichen Farben verschieden hohe Spannungen ein, die Differenz zwischen zwei Farben bleibt jedoch bei allen Materialien gleich groß. Auffällig ist auch, dass bei Licht größerer Wellenlängen (z.B. rot), überhaupt keine Photospannung mehr entsteht. Die Deutung dieser Versuche lässt nur einen Schluss zu:

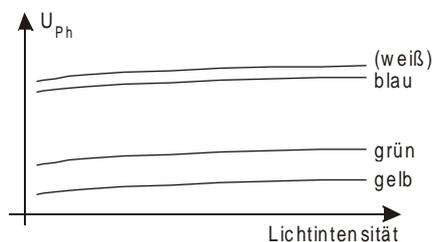


Abb. 12: Photospannung als Funktion der Lichtintensität (*Gegenfeldmethode*) bei Beleuchtung mit Licht verschiedener Farbe

In der Wechselwirkung mit den Elektronen des Kathodenmaterials wird auf jedes Elektron eine bestimmte, durch die Farbe des Lichtes festgelegte Energiemenge übertragen.

Da keine Abhängigkeit von der Intensität des Lichtes vorliegt, kann ein Elektron auch nur genau einmal diese Energiemenge aufnehmen. Damit ist diese Wechselwirkung vergleichbar mit der eines Stoßes zwischen zwei Körpern, offensichtlich verhält sich in diesem Fall das Licht wie ein Teilchen. Eine Erhöhung der Intensität führt lediglich zu einer Vergrößerung der Anzahl dieser Teilchen.

Da sich Licht mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet, lässt sich aus der Wellenlänge λ die Frequenz f berechnen. Trägt man nun die Gegenspannungen U_{ph} in Abhängigkeit von der Frequenz auf, so ergibt sich ein Graph nach Abb. 13. Die einzelnen Messpunkte liegen auf einer Geraden, das heißt, die Energie der Elektronen ist proportional zur Frequenz des eingestrahelten Lichtes. Der Graph schneidet die Frequenzachse bei einer Frequenz $f_0 > 0$, Licht unterhalb dieser Frequenz kann keine Elektronen mehr aus dem Kathodenmaterial auslösen. Das erklärt, warum bei Beleuchtung z.B. mit rotem Licht unabhängig von der Intensität kein Photostrom zu messen ist. Da sich diese Frequenz f_0 mit dem Kathodenmaterial ändert, nicht aber der absolute Abstand der Messpunkte untereinander, wird bei verschiedenen Materialien der Graph lediglich nach oben oder unten verschoben, diese Frequenz ist also eine materialabhängige Größe.

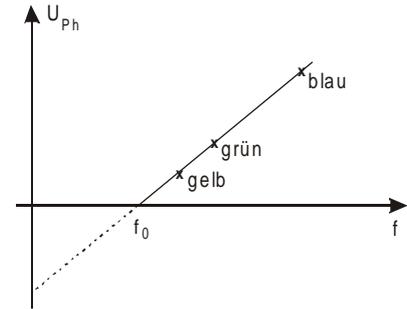


Abb. 13: Abhängigkeit der Photospannung U_{ph} in Abhängigkeit von der Frequenz des eingestrahelten Lichtes

Da die Elektronen, die zur Photospannung beitragen, gegen das elektrische Feld anlaufen konnten, lässt sich aus der Gegenspannung auch die maximale Energie der Elektronen bestimmen. Hierfür gilt die Beziehung

$$W_{El} = e \cdot U_{ph} \quad (14)$$

Die Hochachse des Graphen von Abb. 13 kann also durch Multiplikation mit einer Konstanten aus einer Spannung in eine Energie - hier der Energie der Elektronen - transformiert werden. Damit ergibt sich eine Interpretation des Schnittpunktes des Graphen mit dieser Achse als Austrittsarbeit W_A des Kathodenmaterials: Die Elektronen benötigen eine gewisse Mindestenergie, um das Kathodenmaterial verlassen zu können.

Außerdem lässt sich die Steigung des Graphen bestimmen. Nach der Zweipunkte-Methode erhält man hierfür

$$h = \frac{\Delta U_{ph}}{\Delta f} = \frac{U_{ph}(f_2) - U_{ph}(f_1)}{f_2 - f_1} \quad (15)$$

Die vollständige Gleichung für diesen Graphen lautet folglich:

$$W_{El}(f) = h \cdot f - W_A \quad (16)$$

Da sich die Steigung des Graphen bei Verwendung verschiedener Kathodenmaterialien nicht ändert, ist h eine materialunabhängige Konstante. Abb. 14 beruht auf Messwerten an einer Photozelle mit einer Bariumoxid-Schicht als Kathode. Hier beträgt die Austrittsarbeit $W_A = 1,5 \text{ eV}$ und die Grenzwellenlänge, ab der keine Elektronen mehr ausgelöst werden, liegt bei $\lambda_0 = 775 \text{ nm}$ (rot). Für die Steigung des Graphen erhält man den Wert $h = 4,14 \cdot 10^{-15} \text{ eVs}$.

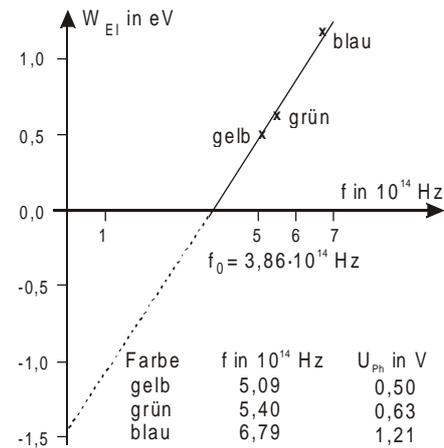


Abb. 14: Messungen bei 3 Wellenlängen an einer Photozelle mit Bariumoxid-Kathode

2.1.2 Die kurzweilige Grenze der Röntgenstrahlung

In einer Röntgenröhre treffen zwischen Kathode und Anode beschleunigte Elektronen auf das Anodenmaterial und werden dort abgebremst, dabei wird Röntgenstrahlung erzeugt. Mit Hilfe der Bragg-Anordnung (s. Abb. 15) kann das Spektrum dieser Strahlung ermittelt werden, wobei die Strahlung auf einen Kristall mit definiertem Netzebenenabstand trifft, dessen Winkel gegenüber der Strahlrichtung verändert wird. Ein Zählrohr im doppelten Winkel des Kristalls registriert dann die Intensität der Strahlung bei einer bestimmten, durch den Kristallwinkel bestimmten Wellenlänge. Trägt man die Intensität (Zählrate des Zählrohrs) in Abhängigkeit von der Wellenlänge auf, erhält man einen Verlauf wie nach Abb. 16. Das Spektrum setzt sich zusammen aus einem kontinuierlichen Anteil (gestrichelte Linie), dem zwei ausgeprägte Peaks überlagert sind, die durch Wechselwirkung der beschleunigten Elektronen mit den inneren Elektronen des Anodenmaterials zustande kommen.

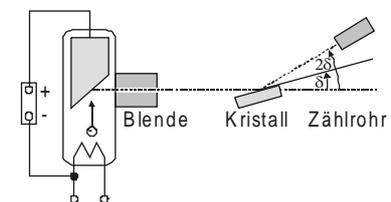


Abb. 15: Bragg-Anordnung zur Aufnahme eines Röntgenspektrums

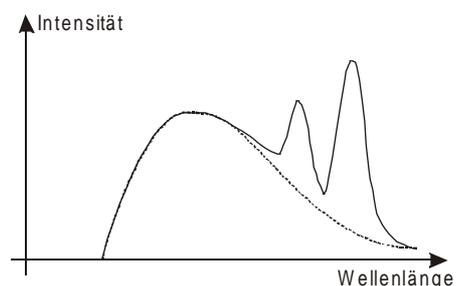


Abb. 16: Spektrum der Strahlung einer Röntgenröhre mit Kupfer als Anodenmaterial

Variiert man die Beschleunigungsspannung U_A der Elektronen in der Röhre, ändert sich die Intensität der Strahlung, außerdem verschiebt sich der linke Teil des Spektrums sich zu kürzeren Wellenlängen, die Peaks dagegen bleiben ortsfest (vergl. Abb. 17). Zu jeder Beschleunigungsspannung U_A findet man eine Grenzwellenlänge λ_{\min} , unterhalb der keine Strahlung mehr auftritt:

U_A	15	20	25	30	35	kV
λ_{\min}	82	62	50	41	35	pm

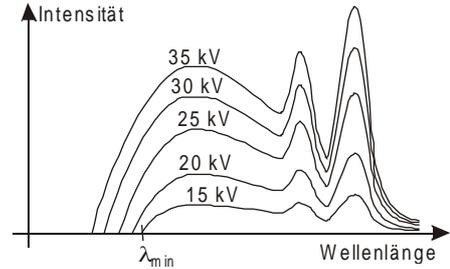


Abb. 17: Veränderung des Röntgenspektrums bei verschiedenen Beschleunigungsspannungen

Da es sich bei Röntgenstrahlung um elektromagnetische Wellen handelt, gehört zu jeder dieser Wellenlängen λ_{\min} eine bestimmte Grenzfrequenz f_{\max} (vergl. Kap. 2.1.1), außerdem lässt sich auch hier jeder Beschleunigungsspannung eine entsprechende Energie der Elektronen zuordnen. Trägt man die Energie der Elektronen gegen die Grenzfrequenz auf, erhält man einen Graphen wie in Abb. 18. Verwendet man die beiden extremen Grenzwellenlängen bei 15 kV und 35 kV, erhält man die Steigung der Geraden wie folgt:

$$\lambda_{\min,15kV} = 82 \text{ pm} \Rightarrow f_{\max,15kV} = \frac{c}{\lambda_{\min,15kV}} = \frac{2,997 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{82 \cdot 10^{-12} \text{ m}} = 3,66 \cdot 10^{18} \text{ Hz}$$

$$\lambda_{\min,35kV} = 35 \text{ pm} \Rightarrow f_{\max,35kV} = \frac{c}{\lambda_{\min,35kV}} = \frac{2,997 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{35 \cdot 10^{-12} \text{ m}} = 8,56 \cdot 10^{18} \text{ Hz}$$

$$h = \frac{\Delta W_{El}}{\Delta f_{\max}} = \frac{35\text{keV} - 15\text{keV}}{8,56 \cdot 10^{18} \text{ Hz} - 3,66 \cdot 10^{18} \text{ Hz}} = 4,08 \cdot 10^{-15} \text{ eVs}$$

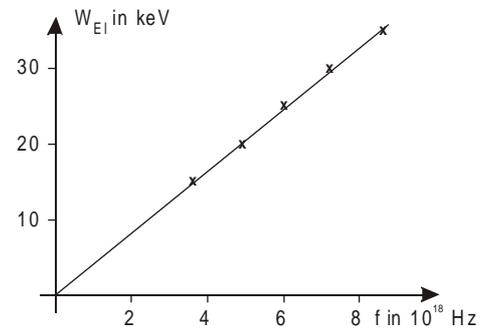


Abb. 18: Grenzfrequenz f_{\max} und Elektronenenergie W_{El} einer Röntgenröhre bei verschiedenen Beschleunigungsspannungen

Dieser Wert stimmt bis auf geringe Abweichungen mit dem Wert aus Kap. 2.1.1 überein.

2.1.3 Das Plancksche Wirkungsquantum

Die letzten beiden Kapitel haben gezeigt, dass trotz unterschiedlichster Versuchsanordnungen der Zusammenhang zwischen Elektronenenergie und der Frequenz der hierbei verwendeten bzw. entstehenden elektromagnetischen Wellen durch ein und dieselbe Konstante h gekennzeichnet wird. Die klassische Modellvorstellung von Wellen kann diesen Mechanismus nicht erklären. Einstein beschrieb diesen Effekt der Energieübertragung 1905, demnach ist die Konstante h eine Naturkonstante und wird nach dem Physiker Max Planck als *Plancksches Wirkungsquantum* bezeichnet. Genaue Messungen ergeben für h den Wert

$$h = 4,136 \cdot 10^{-15} \text{ eVs} = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

Diese Konstante spielt in der Quantenmechanik eine zentrale Rolle, da sie die Wechselwirkung zwischen Teilchen und Wellen bestimmt. Da die Energie des Lichtes in festgelegten Portionen übertragen wird, verwendete Einstein in diesem Zusammenhang den Begriff der *Lichtquanten* bzw. *Photonen*. Demnach gilt:

Beim Energieaustausch zwischen Licht und Materie werden Energiebeträge der Größe $E = h \cdot f$ durch Photonen übertragen.

Ein Elektron absorbiert jeweils nur die Energie eines Photons, Energie wird also nicht kontinuierlich übertragen.

Die Intensität des Lichtes ergibt sich aus der Anzahl der Photonen, die pro Zeiteinheit absorbiert werden.

Die Einführung des Quantenbegriffs für Licht bedeutet nicht, dass es nun nicht mehr als Welle aufgefasst werden darf. Nach wie vor unterliegt das Licht bei seiner Ausbreitung den Gesetzen der Wellenmechanik, die Phänomene wie Ausbreitung, Beugung und Interferenz beschreiben. Erst in der Wechselwirkung von Licht mit Materie tritt der Teilchencharakter in Erscheinung, womit die Übertragung von Energie auf Materie beschrieben werden kann. Diese unterschiedlichen Perspektiven werden durch den Begriff des *Welle-Teilchen-Dualismus* erfasst.

2.1.3.1 Die Masse des Lichts

Für die von einem Photon transportierte Energie gilt nach dem vorausgegangenen Kapitel

$$E = h \cdot f \tag{17}$$

gleichzeitig ergibt sich in der Relativitätstheorie für die Gesamtenergie eines Objektes

$$E_R = m_R \cdot c^2 \tag{18}$$

Da sich kein massebehaftetes Objekt mit Lichtgeschwindigkeit bewegen kann, muss die Ruhemasse eines Photons Null sein, damit besitzt eine Photon ausschließlich kinetische Energie, die bei Wechselwirkung mit Materie als Energiequant vollständig übertragen wird. Daraus ergibt sich für die relativistische Masse eines Photons

$$m_R = \frac{E_R}{c^2} = \frac{h \cdot f}{c^2} = m_{ph} \tag{19}$$

Betrachtet man Licht mit der Wellenlänge $\lambda = 630 \text{ nm}$ (rot), so erhält man mit $\lambda = \frac{c}{f}$ für die Masse eines Photons dieses Lichtes

$$m_{ph} = \frac{h \cdot f}{c^2} = \frac{h}{c} \cdot \frac{f}{c} = \frac{h}{c \cdot \lambda} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{2,997 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 630 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 3,51 \cdot 10^{-36} \text{ kg}$$

was damit lediglich vier Millionstel der Masse eines Elektrons aufweist.

2.1.3.2 Der Impuls des Lichtes

Wenn Photonen eine Masse besitzen, muss ihnen auch ein Impuls p zugeordnet werden, da sie sich ja mit der Geschwindigkeit c bewegen. Analog zur klassischen Mechanik ergibt sich damit der Impuls eines Photons zu

$$p = m_{ph} \cdot c \tag{20}$$

wobei hier die Geschwindigkeit v durch die Lichtgeschwindigkeit c ersetzt wurde, mit der sich das Photon bewegt. Setzt man für die Photonenmasse m_{ph} den Term von Glg. (19) ein, so erhält man

$$p = \frac{h \cdot f}{c^2} \cdot c = \frac{h \cdot f}{c} \tag{21}$$

Der Quotient von Ausbreitungsgeschwindigkeit und Frequenz definiert bei einer Welle ihre Wellenlänge, also gilt

$$p = h \cdot \frac{f}{c} = \frac{h}{\lambda} \tag{22}$$

Dies liefert eine Erklärung für das Entstehen von Kometenschweif. Die feinsten Staubteilchen im Halo um den Kopf des Kometen werden vom Licht der Sonne getroffen, wobei der Staub die einzelnen Photonen absorbiert. Nach dem Impulserhaltungssatz überträgt sich dabei der Impuls des Photons auf das Staubteilchen, was zu einer Vergrößerung der Geschwindigkeit in Richtung der ursprünglichen Lichtausbreitungsrichtung führt. Deshalb ist ein großer Teil des Kometenschweifes immer von der Sonne weg gerichtet. Auf diesem Prinzip beruht auch das Konzept eines Photonentriebwerkes: Ein Hochenergie-Laser emittiert so viele Photonen, dass ein nennenswerter Schub entsteht, der in der Lage ist, eine Raumsonde zu beschleunigen, ohne dass - wie bei chemischen Triebwerken - Treibstoff verbrannt werden muss.

2.1.4 Elektronenbeugung: Welleneigenschaften von Elektronen

Schickt man einen eng gebündelten Elektronenstrahl in einer Vakuumröhre auf einen Leuchtschirm, so entsteht dort ein kleiner leuchtender Punkt, weil der Farbstoff durch die Energie der Elektronen zur Emission von Licht angeregt wird. Bringt man in den Weg des Elektronenstrahl ein dünnes Gitter eines kristallinen Materials, werden die Elektronen an der Oberfläche des Materials gestreut, was dazu führen sollte, dass der Leuchtpunkt an Intensität verliert und um ihn herum Streulicht entsteht (vergl. Abb. 19).

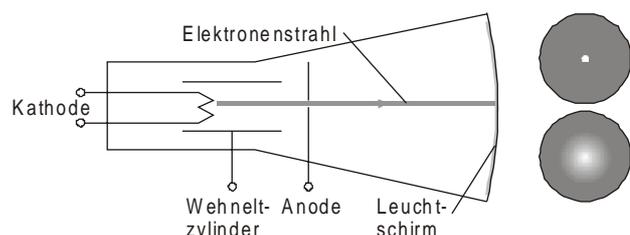


Abb. 19: Elektronenstrahlröhre mit Leuchtschirm, oben: Schirmbild ohne Streukörper; unten: erwartetes Schirmbild mit Streukörper

Tatsächlich erhält man allerdings ein Schirmbild nach Abb. 20, das neben dem Leuchtfleck in der Mitte zwei deutlich erkennbare helle Ringe zeigt, deren Durchmesser mit der Beschleunigungsspannung der Elektronen variiert. Bringt man einen Magneten in die Nähe der Röhre, verschiebt sich das Schirmbild durch die Ablenkung der Elektronen im Magnetfeld, womit nachgewiesen ist, dass diese Erscheinung von den Elektronen erzeugt wird.

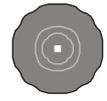
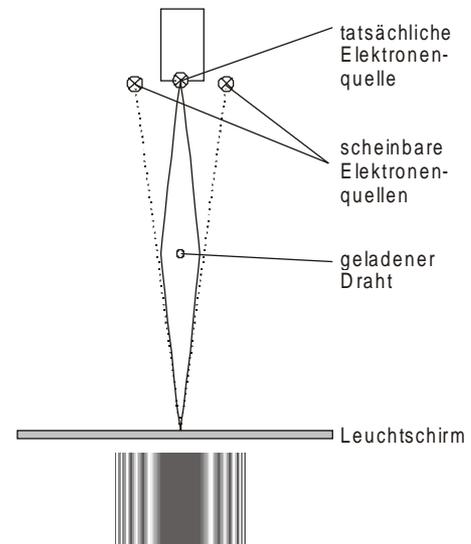


Abb. 20: Tatsächliches Schirmbild mit Streukörper

In einem anderen Experiment wird ebenfalls ein Elektronenstrahl verwendet, der allerdings nicht auf eine dünne Materialschicht, sondern auf einen extrem dünnen, elektrisch geladenen Draht gerichtet wird (vergl. Abb. 21). Das inhomogene elektrische Feld lenkt die Elektronen so ab, dass auf der Schirmebene zwei Teilstrahlen auftreffen, die von zwei verschiedenen Punkten zu kommen scheinen (gestrichelte Linien). Das Schirmbild zeigt (stark vergrößert) ein Streifenmuster, dessen Streifenabstand wiederum von der Beschleunigungsspannung der Elektronen abhängt.



Das Schirmbild zeigt mit seinen abwechselnd hellen und dunklen Streifen auffällige Ähnlichkeit mit denen aus der Wellenoptik bekannten Interferenzbildern. Da sich hier aber anders als bei Licht das Streifenmuster durch ein magnetisches Feld beeinflussen lässt, kann dieses Muster nicht durch Lichtwellen verursacht worden sein.

Abb. 21: Symmetrische Ablenkung eines Elektronenstrahls durch einen dünnen geladenen Draht (Möllenstedt und Düker, 1956), darunter das stark vergrößerte Schirmbild

2.1.4.1 Die deBroglie-Wellenlänge von Elektronen

Die Ähnlichkeit der Erscheinungen mit aus der Wellenoptik bekannten Interferenzbildern veranlasste *deBroglie* (gesprochen: de Broij) 1923, auch Teilchen eine Welleneigenschaft zuzuordnen. So wie bei der Lichtausbreitung die Wellenfronten senkrecht zur Ausbreitungsrichtung ausgerichtet sind, postulierte *deBroglie* auch für Teilchen die Existenz von Wellenfronten, die senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Teilchen ausgerichtet sind. Der Impuls eines Elektrons bestimmt sich zu

$$p = m_R \cdot v \tag{23}$$

dabei ist m_R die (relativistische) Masse des Elektrons und v seine Geschwindigkeit. Nach Glg. (22) gilt dann für seine Wellenlänge die Beziehung

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_R \cdot v} \tag{24}$$

Glg. (24) bestimmt die sog. *deBroglie-Wellenlänge* von Teilchen. Für makroskopische Objekte ist diese Wellenlänge extrem gering, so hat z.B. eine Gewehrkugel der Masse $m = 12$ g, die sich mit $v = 1600$ m/s bewegt, eine Wellenlänge von

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{0,012 \text{ kg} \cdot 1600 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 3,45 \cdot 10^{-35} \text{ m}$$

kann also völlig vernachlässigt werden, da sie noch mehr als 20 Zehnerpotenzen unterhalb atomarer Dimensionen liegt. Anders liegt der Fall bei Elektronen. Die nachfolgende Tabelle enthält die entsprechenden Größen für Elektronen, die mit einer Spannung U beschleunigt worden sind:

U	10 ⁰	10 ¹	10 ²	10 ³	10 ⁴	10 ⁵	10 ⁶	10 ⁷	10 ⁸	V
v	0,20	0,63	1,98	6,25	19,5	54,8	94,1	99,88	99,99	% c
m _R	1,000002	1,00002	1,000196	1,00196	1,0196	1,1958	2,958	20,58	196,8	m _R /m ₀
p	0,540	1,708	5,40	17,1	54,3	179	760	5612	53726	· 10 ⁻²⁴ Js
λ	1227	388	123	38,8	12,2	3,70	0,872	0,118	0,0123	pm

2.1.4.2 Elektronenbeugung an Kristallebenen

In dem Experiment nach Abb. 19 verwendet man als Streukörper Graphit. Dieses weist Netzebenen mit den beiden Netzebenenabständen $d_1 = 123 \text{ pm}$ und $d_2 = 213 \text{ pm}$ auf. Damit Elektronen an diesem Graphit gebeugt werden können, muss ihre Wellenlänge in der Größenordnung dieser Netzebenenabstände liegen. Der Tabelle aus Kap. 2.1.4.1 kann man entnehmen, dass dies bei Beschleunigungsspannungen im Bereich von einigen 100 bis 1000 V der Fall ist. Da die Elektronen nicht durch das Graphit hindurchdringen können, kann es sich bei dem auftretenden Interferenzphänomen nur um Vorgänge an der Oberfläche der Graphitkristallite handeln, wie es z.B. bei der Bragg-Reflexion (vergl. Kap. 2.1.2, Abb. 15) der Fall ist. Dabei tragen nur die Kristallobertflächen zum Schirmbild bei, deren Ausrichtung zufällig die Bragg-Bedingung erfüllt, alle anderen Oberflächen erzeugen lediglich ein diffuses Streulicht. Die Beugung erfolgt dabei nicht nur an einer einzigen Kristallobertfläche (damit würde man lediglich ein punktförmiges Interferenzmaximum erhalten) sondern an sehr vielen im Raum verteilten Oberflächen. Somit entsteht eine ringförmige Interferenzstruktur mit dem ursprünglichen Hauptstrahl im Zentrum (vergl. Abb. 20). Da es zwei verschiedene Netzebenenabstände gibt, müssen zwei Ringe mit unterschiedlichen Durchmessern entstehen.

In einer üblichen Demonstrationsröhre befindet sich der Leuchtschirm $a = 0,15 \text{ m}$ vom Graphitgitter entfernt. Die Skizze nach Abb. 22 zeigt die entsprechende Anordnung sowie im Detailausschnitt exemplarisch eine Kristallobertfläche, deren Ausrichtung der Bragg-Bedingung genügt. Für die hier verwendete Spannung $U = 1000 \text{ V}$ kann man nun zunächst nach der Bragg-Bedingung den Winkel 2δ bestimmen und daraus die Radien r_1 und r_2 der zu beobachtenden Ringe ermitteln.

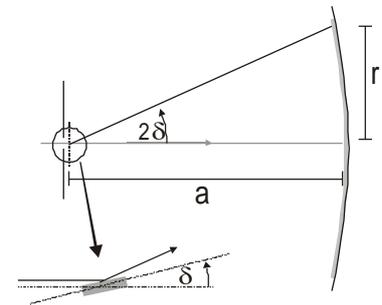


Abb. 22: Zuordnung von Strecken und Winkeln bei der Elektronenbeugungsröhre; unten links: Ausrichtung eines Kristallits nach der Bragg-Bedingung

Nach der Bragg-Gleichung gilt für das 1. Interferenzmaximum die Beziehung

$$\lambda = 2 \cdot d \cdot \sin(\delta) \quad (25)$$

Der Ringradius ergibt sich aus geometrischen Überlegungen zu

$$r = a \cdot \tan(\delta) \quad (26)$$

Glg. (25) aufgelöst nach d und eingesetzt in Glg. (26) ergibt für den Ringdurchmesser

$$r = a \cdot \tan\left(\arcsin\left(\frac{\lambda}{2 \cdot d}\right)\right) \quad (27)$$

Der obigen Tabelle entnimmt man bei einer Spannung von 1000 V für die Elektronen eine Wellenlänge von 38,8 pm. Für die beiden Netzebenenabstände erhält man somit die Ringradien

$$r_1 = a \cdot \tan\left(\arcsin\left(\frac{\lambda}{2 \cdot d_1}\right)\right) = 0,15 \text{ m} \cdot \tan\left(\arcsin\left(\frac{38,8 \cdot 10^{-12} \text{ m}}{2 \cdot 123 \cdot 10^{-12} \text{ m}}\right)\right) = 0,0240 \text{ m}$$

$$r_2 = a \cdot \tan\left(\arcsin\left(\frac{\lambda}{2 \cdot d_2}\right)\right) = 0,15 \text{ m} \cdot \tan\left(\arcsin\left(\frac{38,8 \cdot 10^{-12} \text{ m}}{2 \cdot 213 \cdot 10^{-12} \text{ m}}\right)\right) = 0,0137 \text{ m}$$

Eine Durchführung des Experimentes zeigt, dass die rechnerisch gewonnenen Werte mit den experimentell ermittelten übereinstimmen, was als eine Bestätigung der These von deBroglie gewertet werden kann, dass Elektronen sich wie Wellen verhalten können.

Unter dieser Prämisse lässt sich auch das Schirmbild des Versuches nach Abb. 21 begründen. Aus Sicht des Schirmes stammen die Elektronen von zwei Quellen, die einen geringen Abstand d voneinander haben. Tatsächlich handelt es sich jedoch nur um eine einzige Quelle, die beiden virtuellen Quellen können also als kohärent angesehen werden - insoweit entspricht dies den beiden Spalten eines von einer Wellenfront beleuchteten Doppelspaltes.

In diesem Fall gilt für das Auftreten eines Interferenzmaximums n -ter Ordnung die Beziehung

$$\sin(\delta) = \frac{n \cdot \lambda}{d} \quad (28)$$

das Schirmbild zeigt also mehrere Maxima aufsteigender Ordnung.

2.1.5 Der Compton-Effekt

Der Photoeffekt (vergl. Kap. 2.1.1) geht von der Annahme aus, dass die gesamte Energie des Photons auf das Elektron übertragen wird und das Photon bei dem Prozess verschwindet. Dieses entspricht dem klassischen Fall des unelastischen Stoßes nach Abb. 23, wobei die Stoßpartner mit den beiden vor dem Stoß getrennten Massen m_1 und m_2 verschmelzen und sich nach dem Stoß als eine gemeinsame Masse $m_{1,2}$ weiterbewegen. Diese Art der Energieübertragung eines Photons auf ein Elektron wird deshalb analog ebenfalls als unelastischer Stoß bezeichnet. Die Geschwindigkeit $v_{1,2}$ der Masse $m_{1,2}$ nach dem Stoß ergibt sich aus den Gesetzen der Energie- und Impulserhaltung und hängt ab von den Massen m_1 und m_2 sowie deren Geschwindigkeiten v_1 und v_2 . In der Abbildung ist $v_2 = 0$, damit muss $v_{1,2} < v_1$ sein.

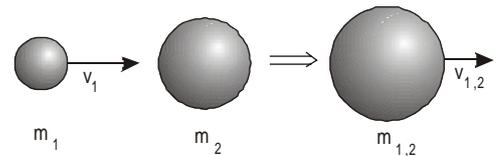


Abb. 23: Unelastischer Stoß zweier Massen

Eine zweite Stoßart ist der elastische Stoß, wie er z.B. beim Billardspiel auftritt. Hier stößt eine Masse m_1 auf eine zweite Masse m_2 und überträgt einen Teil seiner kinetischen Energie und seines Impulses auf die zweite Masse, anschließend bewegen sich beide Massen getrennt mit neuen Geschwindigkeiten und ggf. geänderten Richtungen unabhängig voneinander weiter, wie in Abb. 24 skizziert.

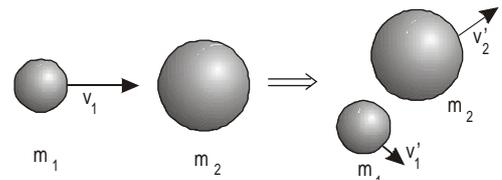


Abb. 24: Elastischer Stoß zweier Massen

Nach Kap. 2.1.3 muss Licht in seiner Eigenschaft als Photonen ebenfalls eine Masse und ein Impuls zugeordnet werden. In Analogie zu den klassischen Stößen sollte dann auch ein elastischer Stoß möglich sein. Anders als im klassischen Fall kann das Photon allerdings seine Energie nicht dadurch ändern, dass es seine Geschwindigkeit ändert, folglich muss sich seine Frequenz ändern. Geht man davon aus, dass sich das gestoßene Elektron vor dem Stoß in Ruhe befindet, gilt vor dem Stoß

$$E_e = m_{0e} \cdot c^2 \quad (28a)$$

$$p_e = 0 \quad (28b)$$

$$E_{ph} = h \cdot f \quad (28c)$$

$$p_{ph} = \frac{h \cdot f}{c} \quad (28d)$$

Nach dem Stoß hat das Elektron Energie von dem Photon aufgenommen und die Energie des Photons hat sich verringert:

$$E'_e = m_e \cdot c^2 \quad (29a)$$

$$p'_e > 0 \quad (29b)$$

$$E'_{ph} = h \cdot f' \quad (29c)$$

$$p'_{ph} = \frac{h \cdot f'}{c} \quad (29d)$$

Nach dem Energieerhaltungssatz gilt demnach

$$E_{ph} + E_e = E'_{ph} + E'_e \quad (30)$$

Nach dem Impulserhaltungssatz muss die Summe der Impulse vor dem Stoß gleich der Summe der Impulse nach dem Stoß sein, wobei zu beachten ist, dass es sich beim Impuls um eine vektorielle Größe handelt:

$$\vec{p}_{ph} = \vec{p}'_{ph} + \vec{p}'_e \quad (31)$$

Den Betrag des Impulses p'_e des Elektrons nach dem Stoß erhält man nach Abb. 25 über den Cosinus-Satz zu

$$p'^2_e = p^2_{ph} + p'^2_{ph} - 2 \cdot p_{ph} \cdot p'_{ph} \cdot \cos(\varphi) \quad (32)$$

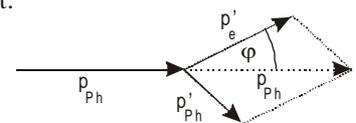


Abb. 25: Impulse von Photon und Elektron beim Compton-Effekt

Um die Anzahl der Variablen zu reduzieren, benötigt man eine weitere Gleichung. Aus den Einsteinschen Postulaten folgt (hier ohne Herleitung) die sogenannte Energie-Impuls-Invariante

$$E_R^2 - (c \cdot p)^2 = E_0^2 \quad (33)$$

die besagt, dass die Differenz links vom Gleichheitszeichen in allen Inertialsystemen gleich ist. Mit den oben verwendeten

Bezeichnungen erhält man daraus

$$E_e'^2 - (c \cdot p_e')^2 = E_e^2 = m_{0e}^2 \cdot c^4 \quad (34)$$

Aus Glg. (30) erhält man nach Einsetzen der Terme von Glg. (28) und (29) durch Auflösen nach E_e'

$$E_e' = E_{ph} + E_e - E_{ph} \Rightarrow E_e' = h \cdot f + m_{0e} \cdot c^2 - h \cdot f' \quad (35)$$

und aus Glg. (32) durch Einsetzen der entsprechenden Terme

$$p_e'^2 = (h \cdot f)^2 + (h \cdot f')^2 - 2 \cdot h^2 \cdot f \cdot f' \cdot \cos(\varphi) \quad (36)$$

Einsetzen von Glg. (35) und (36) in (34) ergibt

$$\left(h \cdot f + m_{0e} \cdot c^2 - h \cdot f' \right)^2 - \left((h \cdot f)^2 + (h \cdot f')^2 - 2 \cdot h^2 \cdot f \cdot f' \cdot \cos(\varphi) \right) = m_{0e}^2 \cdot c^4$$

Ausmultiplizieren und Variablentrennung liefert

$$2 \cdot h \cdot f \cdot m_{0e} \cdot c^2 - 2 \cdot h \cdot f' \cdot m_{0e} \cdot c^2 - 2 \cdot h^2 \cdot f \cdot f' + 2 \cdot h \cdot f \cdot f' \cdot \cos(\varphi) = 0$$

Division durch h und Ausklammern ergibt daraus

$$m_{0e} \cdot c^2 \cdot (f - f') = h \cdot f \cdot f' \cdot (1 - \cos(\varphi))$$

Isoliert man f und f' auf der linken Seite der Gleichung, so erhält man

$$\frac{f - f'}{f \cdot f'} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{f} = \frac{h}{m_{0e} \cdot c^2} \cdot (1 - \cos(\varphi))$$

Der Kehrwert der Frequenz ergibt mit dem Faktor c die Wellenlänge λ , somit erhält man nach Multiplikation mit c

$$\lambda' - \lambda = \Delta\lambda = \frac{h}{m_{0e} \cdot c} \cdot (1 - \cos(\varphi)) \quad (37)$$

die Wellenlängenänderung $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ hängt also lediglich von Konstanten und dem Winkel φ ab, unter dem das gestreute Photon registriert wird, nicht jedoch von der Wellenlänge und damit Frequenz des eingestrahnten Photons. Für einen Streuwinkel von $\varphi = 90^\circ$ ergibt sich die sogenannte Comptonwellenlänge $\lambda_c = 2,43 \text{ pm}$.

Im Vergleich zu Lichtwellen mit einer Wellenlängenänderung im Bereich mehrerer Hundert Nanometer ist diese Wellenlängenänderung sehr gering und tritt damit nicht in Erscheinung. Tatsächlich kann dieser Effekt erst bei Röntgen- oder Gammastrahlung nachgewiesen werden.

2.2 Stochastische Deutung von Quantenobjekten

Die Wechselwirkung von Licht mit Materie beruht darauf, dass durch ein Photon Energie auf ein Elektron übertragen wird. Dieser Vorgang wird in Filmen verwendet: In einer Filmemulsion befinden Silberbromid-Kristalle, die aus Br^- - und Ag^+ -Ionen aufgebaut sind. Trifft ein Photon auf diesen Kristall, wird in dem Silberbromid-Kristall ein Elektron freigesetzt, was dazu führt, dass das Brom-Ion zu elementarem Brom reagiert. Durch das frei werdende Elektron kann nun seinerseits ein anderes Silber-Ion zu metallischem Silber reduziert werden. Die dabei entstehenden Silberspuren stellen das spätere Bild dar, das durch den Entwicklungsprozess fixiert wird.

Beleuchtet man einen Film mit Licht verschiedener Intensität, wird er unterschiedlich stark geschwärzt. Die Schwärzung erfolgt dabei nicht gleichmäßig, sondern ergibt lediglich eine willkürliche Verteilung von Schwärzungspunkten. Je geringer die Lichtintensität ist, desto geringer ist also die Wahrscheinlichkeit, in einem Flächenelement des Films ein Silber-Ion anzutreffen. Daraus folgt, dass an hellen Stellen des Filmes weniger Photonen aufgetroffen sind als an dunklen. Abb. 26 zeigt die Aufnahme eines Interferenzmaximums eines Gitterspektrums bei monochromatischem Licht für zwei verschiedene Intensitäten. Die Intensität des Lichtes ist demnach ein Maß für die Auftreffwahrscheinlichkeit eines Photons, diese ist damit proportional zum Amplitudenquadrat \hat{E}^2 der elektrischen Feldstärke.

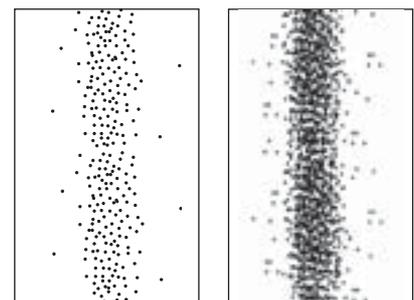


Abb. 26: Filmaufnahme eines Interferenzstreifens bei niedriger (links) und hoher (rechts) Lichtintensität.

2.3 Beobachtung von Quantenobjekten

Das Beobachten von Objekten bedeutet, durch Messungen an diesen Objekten Aussagen über sie zu erhalten. In der klassischen Mechanik, bei der es sich vor allem um makrophysikalische Körper gehandelt hat, war dies noch weitgehend unproblematisch. Abb. 27 zeigt einen Versuchsaufbau, mit dem z.B. die beschleunigte Bewegung einer Kugel auf einer schiefen Ebene untersucht wurde. Die Abstände der Glöckchen wurden dabei so gewählt, dass sich beim Herabrollen der Kugel ein gleichmäßiger Takt ergab, mit dem sie angeschlagen wurden. Ist die Masse der Kugel hinreichend groß gegenüber der Masse der Glöckchen, so kann man davon ausgehen, dass der Energieverlust an die Glöckchen die Messung nur unwesentlich beeinflusst. Man kann sich aber vorstellen, dass z.B. bei Verwendung einer leichten Styroporkugel statt einer Stahlkugel diese bei jedem Anschlag stark abgebremst wird und die gemessene Bewegung nicht mehr gleichmäßig beschleunigt erfolgt. Die Messung beeinflusst also das Ergebnis. Verwendet man statt der Glöckchen Lichtschranken, reduziert sich zwar der Einfluss der Messapparatur ganz erheblich, ist aber dennoch nicht vollständig verschwunden, wie das nächste Beispiel zeigt.

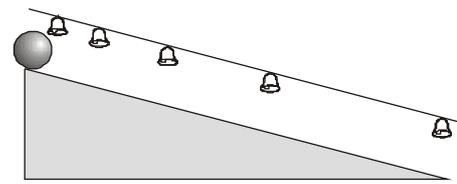


Abb. 27: Mit Glöckchen versehene Fallrinne zum Nachweis der gleichmäßigen Beschleunigung

Für ein Experiment benötigt man einzelne Elektronen genau bekannter Geschwindigkeit. Zwar ist es möglich, durch eine geeignete Quelle eine große Zahl von Elektronen zu erzeugen, sie durch eine bestimmte Spannung auf die gewünschte Geschwindigkeit zu beschleunigen und dann ein einzelnes Elektron aus dem Strahl auszublenden. Um seine Geschwindigkeit zu bestimmen, kann z.B. die von dem Elektron auf ein Objekt übertragene Energie bestimmt werden, das hat jedoch den Effekt, dass das Elektron anschließend eine gänzlich andere Geschwindigkeit besitzt und für den eigentlichen Versuch nicht mehr verwendet werden kann. Selbst wenn man den Compton-Effekt verwendet, um über das gestreute Photon eine Aussage über die Elektronengeschwindigkeit zu erhalten, ist anschließend durch die beim elastischen Stoß übertragene Energie die Geschwindigkeit des Elektrons verändert worden (vergl. Abb. 28). Dieses führt zu einem grundsätzlichen Dilemma jedes Messvorgangs:

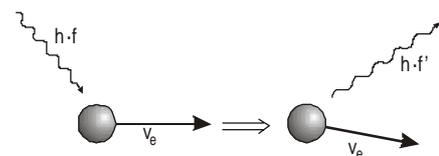


Abb. 28: Änderung der Elektronengeschwindigkeit durch „Messung“ mit einem Photon

Jede Messung verändert die zu messende Eigenschaft des Messobjektes.

Während für makroskopische Objekte die Beeinflussung durch geeignete Maßnahmen reduziert werden kann, ist dies für Quantenobjekte nicht mehr möglich.

2.4 Die Heisenbergsche Unschärferelation

In der klassischen Mechanik ist die Bahn eines Teilchens eindeutig bestimmt, sein Ort sowie seine Geschwindigkeit und damit sein Impuls sind jederzeit bekannt. Verlässt man mit den Quantenobjekten den Bereich makroskopischer Teilchen, ist der klassische Bahnbegriff nicht mehr anwendbar, an seine Stelle treten Wellenfunktionen. Da hier jedoch eine Wellenlänge an einem Punkt nicht mehr definiert ist, andererseits der Impuls eines Quants durch die Wellenlänge bestimmt ist, lässt sich nicht mehr von einem Impuls an einem Ort sprechen. Für Quantenobjekte gilt vielmehr:

Entweder Ort oder Impuls ein Quantenobjektes können beliebig genau bestimmt werden, niemals jedoch beide Größen gleichzeitig.

Werner Heisenberg hat diesen Sachverhalt 1927 in der *Heisenbergschen Unschärferelation* beschrieben. Tritt die Wellenfront eines Quants durch einen Einfachspalt der Breite d , so wird durch den Spalt der Ort der Wellenfunktion auf ein Intervall der Breite $d = \Delta y$ eingeschränkt. Die Vielzahl der möglichen Lichtwege durch den Einzelspalt führt aber auf dem Schirm zu einem Interferenzbild etwa wie in Abb. 29. Hatte das Quant vor dem Spalt in x -Richtung den Impuls \vec{p} mit den Komponenten $p_x = p$ und $p_y = 0$, so bedeutet das Auftreten von Quanten z.B. am Ort A, dass nunmehr die y -Komponente des Impulses nicht mehr 0 ist. Je enger man den Spalt macht - das heißt: je kleiner Δy wird - desto größer wird eine mögliche Abweichung der y -Komponente des Impulses. Hinter dem Spalt sind also die Komponenten des Impulses nicht mehr so genau bekannt wie vor dem Spalt, die y -Komponente des Impulses erhält also eine Unschärfe Δp_y .

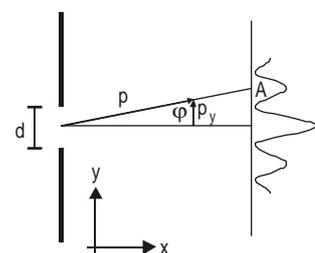


Abb. 29: Impulsunschärfe hinter einem Spalt

Ist die Spaltbreite nur noch so groß wie die Wellenlänge, verbreitert sich das Interferenzbild so weit, dass außer dem Hauptmaximum kein weiteres Maximum zu finden ist: die y-Komponente des Impulses ist nicht mehr definiert und liegt im Intervall $[0 \dots p]$, d.h.: $\Delta p_y = p$.

Aus Abb. 29 entnimmt man für die y-Komponente des Impulses

$$p_y = p \cdot \sin(\varphi) \quad (38)$$

und aus der Beugung und Interferenz am Spalt kennt man (hier nur in erster Näherung gültig) die Beziehung

$$\sin(\varphi) = \frac{\lambda}{d} = \frac{\lambda}{\Delta y} \quad (39)$$

Nach Glg. (24) besteht zwischen Impuls und Wellenlänge eines Quants die Beziehung

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad (40)$$

Für den Grenzfall $\Delta y = \lambda$ mit $\sin(\varphi) = 1$ erhält man somit aus Glg. (39)

$$1 = \frac{\lambda}{\Delta y} = \frac{h}{\Delta y \cdot \Delta p_y} \quad (41)$$

Für größere Spaltbreiten ist der Sinus des Winkels kleiner als 1, somit erhält man verallgemeinert die Beziehung

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \geq h \quad (42)$$

Hier wurde nur eine Komponente des Impulses untersucht, diese Überlegungen gelten aber auch für die anderen beiden Richtungskomponenten, also $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h$, $\Delta y \cdot \Delta p_y \geq h$, $\Delta z \cdot \Delta p_z \geq h$. Allgemein gilt somit

$$\Delta s \cdot \Delta p \geq h \quad (43)$$

Glg. (43) quantifiziert somit die Heisenbergsche Unschärferelation. Wegen der extrem kleinen Dimension von h spielt das Unschärfeprinzip bei makroskopischen Objekten keine Rolle, sondern kommt erst bei sehr kleinen Objekten - eben Quanten - zum Tragen.

2.4.1 Die Unschärfe eines Staubkornes

Ein Staubkorn mit einer Masse von ca. 10^{-12} kg habe einen Durchmesser von $1 \mu\text{m}$, der auf 1 % genau, also auf $\Delta x = 10^{-8}$ m bestimmt werden kann. Für den Impuls gilt $p = m \cdot v$, folglich gilt für die Impulsunschärfe $\Delta p = m \cdot \Delta v$. Nach Division durch m erhält man somit

$$\Delta x \cdot m \cdot \Delta v \geq h \Rightarrow \Delta x \cdot \Delta v \geq \frac{h}{m}$$

je größer also die Masse m ist, desto kleiner sind die Unschärfen seiner Koordinaten und seiner Geschwindigkeit. Einsetzen liefert für Δv die Größenordnung

$$\Delta v \geq \frac{h}{\Delta x \cdot m} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{10^{-8} \text{ m} \cdot 10^{-12} \text{ kg}} = 6,626 \cdot 10^{-14} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

die Ortsunschärfe wird sich also bei keiner realen Geschwindigkeit, mit der sich das Staubkorn bewegen kann, bemerkbar machen.

2.4.2 Die Unschärfe eines Elektrons im Wasserstoffatom

Die Bahn des Elektrons in einem Wasserstoffatoms definiert zugleich die Größe des Atoms und liegt bei 10^{-10} m, die Ortsunschärfe des Elektrons liegt also bei $\Delta x = 10^{-10}$ m. Aus der klassischen Mechanik (Bewegung einer Ladung im Coulombfeld) lässt sich die Bahngeschwindigkeit des Elektrons berechnen, man erhält ca. $v = 2,3 \cdot 10^6$ m/s. Nach der Vorgehensweise von Kap. 2.4.1 erhält man für die Geschwindigkeitsunschärfe des Elektrons den Wert $\Delta v = 7,27 \cdot 10^6$ m/s, der um mehr als den Faktor 3 größer ist als die klassisch bestimmte Geschwindigkeit. Da die Unschärfe der Geschwindigkeit größer ist als die Geschwindigkeit selbst, kann man offensichtlich nicht mehr davon sprechen, dass sich das Elektron mit einer bestimmten Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn bewegt - die klassische Mechanik ist folglich zur Beschreibung von Atomen nicht geeignet.

3 Physik der Atome

Der Begriff des Atoms wurde bereits in der Antike 465 v.Chr. von *Leukippos von Milet* eingeführt, in dem er behauptete, dass alle Dinge aus „unteilbaren Teilchen“ (griech.: a-tomos, un-teilbar) zusammengesetzt sind. *Demokrit* baute 100 Jahre später auf dieser Vorstellung auf und entwickelte daraus eine vorwissenschaftlich-philosophische Atomtheorie, in der er forderte, dass Sinneseindrücke durch das Denken überprüft werden müssten. Für anderthalb Jahrtausende verschwand der Atombegriff wieder in der Versenkung, erst 1353 greift *Nicolaus v. Autrecourt* ihn wieder auf und entwickelt eine atomistisches Weltbild. War der bisherige Atombegriff vor allem philosophischer Natur, begann im 17. Jh. *Daniel Sennert*, chemische Elemente und Atome in den prä-naturwissenschaftlichen Sprachgebrauch einzuführen, in diesem Jahrhundert begründet auch *Galileo Galilei* die neuzeitliche Physik. 1738 führt *Daniel Bernoulli* die Gasgesetze auf Gasatome zurück, 1811 unterscheidet *Avogadro* bereits zwischen Atomen und Molekülen. Um die Jahrhundertwende 1900 stellt sich *Sir Joseph John Thomson* ein Atom als ein etwa 1 Angström großes Kügelchen vor, in dem die positive Ladung gleichmäßig verteilt ist und in dem die punktförmigen Elektronen eingebettet sind („Rosinenkuchen-Modell“). 1906 bestrahlte *Ernest Rutherford* Goldatome mit α -Teilchen und stellt fest, dass sie aus einer Hülle und einem Kern bestehen, wobei der Kern nur 1/10 000 der Atomgröße einnimmt, aber nahezu die gesamte Masse beinhaltet.

Die Physik der Atome schlug nun zwei Richtungen ein: Während sich im Rahmen der Physik der Atomhülle viele Experimente mit den Prozessen in der Elektronenhülle beschäftigten, um deren Struktur und Bedeutung für die Kräfte zwischen Atomen zu ergründen, befasste sich die Kernphysik mit Versuchen, das Innere des Atomkerns zu erforschen und zu verstehen. Zunächst ausgehend von den mechanistischen Vorstellungen zeigte sich, dass die klassische Physik (Mechanik und Elektrizitätslehre) nicht in der Lage war, die hier auftretenden Phänomene zu beschreiben. Hier hat die Quantenphysik einen wesentlichen Teil zum Verständnis beitragen können, obwohl jeder Erkenntnisschritt die Entwicklung noch abstrakterer Hypothesen und Theorien zur Folge hatte und noch hat.

Wenn sich die Atomphysik auch mit den kleinsten Bausteinen unseres Universums auseinandersetzt, findet sie doch auch immer wieder Bestätigungen und Resonanz in der Astrophysik, die sich mit den größten Objekten unserer Welt befasst. So beruht z.B. die Entfernungsmessung in der Astronomie auf der durch Hubble postulierten Rotverschiebung entfernter Himmelskörper, die zurückgeführt wird auf die Expansion des Universums. Das hierbei beobachtete Licht unterliegt jedoch den Gesetzen der Quantenmechanik und ist bei seiner Entstehung also universell geltenden Gesetzen unterworfen. Auch die Kosmologen greifen bei ihren Erklärungen zur Entstehung unseres Universums auf die Quantenphysik zurück.

3.1 Atommodelle

Aufgabe eines Modelles ist es, Beobachtungen zu erklären und unter Verwendung bekannter Gesetzmäßigkeiten Voraussagen zu machen, die sich im Experiment bewähren müssen. Je weiter die Entwicklung von Modellen fortgeschritten ist, desto schwieriger ist es, diese zu erweitern, da jedes neue Modell alle bisherigen Modelle in ihren Aussagen stützen muss. So ist z.B. die relativistische Mechanik kein alternatives Modell zur Newtonschen Mechanik, sondern ergänzt diese für den Bereich großer Geschwindigkeiten, die in der Newtonschen Mechanik nicht auftraten. Grundsätzlich kann man davon ausgehen, dass die Entwicklung von Modellen mit der Entwicklung einer immer weiter verbesserten physikalischen Messtechnik einhergeht, was man besonders bei der Entwicklung der Atommodelle verfolgen kann.

3.1.1 Der Rutherford'sche Streuversuch

Rutherford hat zusammen mit Geiger und Marsden in den Jahren 1906 bis 1913 ein für die Physik bahnbrechendes Experiment durchgeführt. Ausgehend von der Thomsonschen Vorstellung eines homogenen Atoms sollte die Größe des Atoms dadurch bestimmt werden, dass man geladene Partikel auf eine Schicht von schweren Atomen schießt und anhand der Streuung der Partikel auf die Atomgröße zurückschließt. Für dieses Experiment benutzten sie eine sehr dünne Goldfolie von nur wenigen Mikrometern Stärke, die sie mit der α -Strahlung eines Radiumpräparates bestrahlten (siehe Abb. 30).

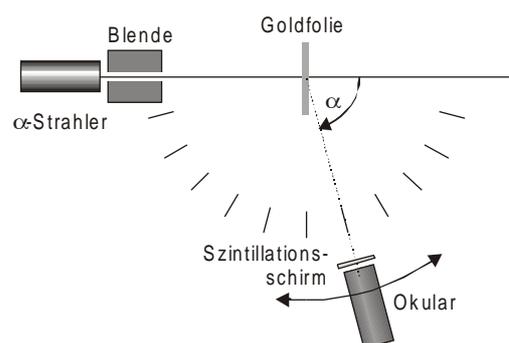


Abb. 30: Prinzipaufbau des Versuchs von Rutherford, Geiger und Marsden

Die Streustrahlung wird in Abhängigkeit vom Winkel gemessen. Dazu wird auf einem Szintillationsschirm, auf dem die eintreffenden α -Teilchen kleine Lichtblitze erzeugen und die durch ein Vergrößerungsglas beobachtet werden, die Zählrate pro Zeiteinheit durch Auszählen bestimmt. Die Winkelverteilung lässt einen Rückschluss auf die Größe der Atome zu. Nach dem Thomsonschen Modell sollte sich eine Gaußkurve ergeben, wie in Abb. 31 als gestrichelte Linie dargestellt. Sie geht davon aus, dass die homogene Verteilung der positiven Ladung die positiv geladenen α -Teilchen kaum abzulenken vermag, während die punktförmig verteilten Elektronen zu einer mehrfachen, dennoch geringfügigen Ablenkung führen, da ihre Masse um den Faktor 7 350 kleiner ist als die der α -Teilchen. Man beachte die logarithmische Teilung der Ordinatenachse, die die Wahrscheinlichkeit angibt, dass eine bestimmte Zählrate erreicht wird.

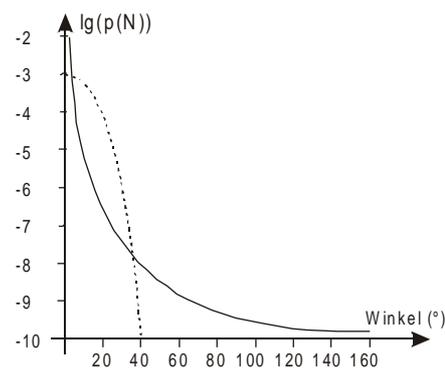


Abb. 31: Erwartete (gestrichelt) und tatsächliche Winkelverteilung der gestreuten Strahlung

Tatsächlich ergab sich aber ein erheblich abweichender Verlauf. Nach wie vor kann die Ablenkung durch die Elektronen praktisch vernachlässigt werden, da sie insgesamt nur zu einem Winkel von $0,008^\circ$ beitragen können. Um diese Verteilung zu erzielen, müssen sich die gestreuten α -Teilchen auf hyperbelförmigen Bahnen bewegen, wobei sie sich der positiven Ladung zwar so weit nähern, wie es die Abstoßungskräfte in Abhängigkeit vom Winkel zulassen, sie aber nicht treffen. 1911 behauptete Rutherford deswegen, dass sich die gesamte positive Ladung in einem Punkt befinden müsse und nicht über den bis dahin bekannten Atomdurchmesser verteilt sein könne. Eine zuverlässige Größe des Atomkernes war mit diesen Messungen allerdings nicht zu ermitteln, da nur der gemeinsame Brennpunkt der Bahnhyperbeln bestimmt werden kann. Der aus den Hyperbeln zu ermittelnde minimale Umkehrpunkt der α -Teilchen lieferte als Anhaltspunkt für den Kerndurchmesser lediglich die Aussage, dass er kleiner als 10^{-14} m sein muss.

3.1.2 Das Bohrsche Atommodell

Nach dem Rutherfordschen Atommodell sollten die Elektronen sich in großer Entfernung vom Kern befinden. Damit sie durch die Anziehung der positiven Ladung des Kerns nicht in den Kern stürzen, muss eine Gegenkraft vorhanden sein, die sie in einem festen Abstand vom Kern hält. Dies legte die Vorstellung nahe, dass die Elektronen den Kern umkreisen. Nach den Aussagen der klassischen Physik sendet ein Elektron aber auf einer Kreisbewegung elektromagnetische Wellen aus, sodass es Energie verliert und innerhalb von wenigen 10^{-8} s in den Kern stürzt. Damit wären Atome nach diesem Modell nicht stabil, was aber der alltäglichen Erfahrung eindeutig widerspricht.

Auf der Grundlage des Rutherfordschen Modells stellte Nils Bohr 1913 die Hypothese auf, dass sich die Elektronen auf ihren Bahnen strahlungsfrei bewegen und nur durch Aufnahme oder Abgabe bestimmter Energiemengen die Bahn wechseln können. Für das einzige Elektron des Wasserstoffatoms stellte er die beiden folgenden Postulate auf:

1. Bohrsches Postulat:

Der Bahndrehimpuls des Elektrons nimmt nur ganzzahlige Werte von $h/2\pi$ an.

2. Bohrsches Postulat:

Die Energiedifferenz zwischen zwei Bahnen wird durch Absorption oder Emission eines Photons ausgeführt.

Das erste Postulat definiert die Quantenzahl n , die angibt, auf welcher Bahn sich das Elektron bewegt. Es gilt:

$$L = n \cdot \frac{h}{2 \cdot \pi} \tag{44}$$

dabei ist $L = r \cdot m_e \cdot v$ der Drehimpuls des Elektrons auf seiner Kreisbahn mit dem Radius r um den Kern, m_e die Elektronenmasse und v seine Bahngeschwindigkeit.

Das zweite Postulat verknüpft die Aufnahme und Abgabe von Energie mit der bereits erwähnten Einsteinschen Bedingung (vergl. Kap. 2.1.3). Sind E_{n1} und E_{n2} die Bahnenergien auf zwei verschiedenen Bahnen mit den Quantenzahlen $n1$ und $n2$, so gilt für die Energie des Photons

$$E_{ph} = h \cdot f = E_{n2} - E_{n1} = \Delta E \tag{45}$$

3.1.2.1 Bahnenergien beim Bohrschen Atommodell

Die Gesamtenergie des Elektrons im Wasserstoffatom setzt sich zusammen aus der potenziellen Energie im Coulombfeld des Kerns und der kinetischen Energie seiner Bahngeschwindigkeit:

$$E_n = E_{kin,n} + E_{pot,n} \quad (46)$$

Die kinetische Energie ergibt sich zu

$$E_{kin,n} = \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v_n^2 \quad (47)$$

da hier nicht relativistisch gerechnet werden muss, steht hier m_e für die Ruhemasse des Elektrons. Für die potenzielle Energie gilt

$$E_{pot,n} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_n}$$

Da $Q_1 = -Q_2 = -e$ ist, erhält man daraus

$$E_{pot,n} = -\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r_n} \quad (48)$$

Die Geschwindigkeit v_n in Glg. (47) und der Bahnradius r_n in Glg. (48) sind noch unbekannt, also benötigt man eine weitere Beziehung, die man hier durch Betrachtung der wirkenden Kräfte erhält. Da sich das Elektron auf einer Kreisbahn bewegt, besteht zwischen Coulombkraft und Zentripetalkraft ein Gleichgewicht, damit gilt

$$F_Z = F_C \Rightarrow \frac{m_e \cdot v_n^2}{r_n} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r_n^2} \quad (49)$$

Multiplikation mit r_n^2 und Division durch v_n ergibt auf der linken Seite der Gleichung das Drehmoment L:

$$L = r_n \cdot m_e \cdot v_n = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{v_n} \quad (50)$$

Setzt man Glg (44) für L ein und löst nach v_n auf, erhält man

$$n \cdot \frac{h}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{v_n} \Rightarrow v_n = \frac{2 \cdot \pi \cdot e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot h} \cdot \frac{1}{n} = \frac{e^2}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot h} \cdot \frac{1}{n} \quad (51)$$

Damit ergibt sich v_n lediglich aus bekannten Konstanten und der natürlichen Zahl n, die die Quantenzahl der Bahn angibt. Um r_n zu erhalten, löst man z.B. Glg. (49) nach r_n auf und setzt v_n nach Glg. (51) dort ein. Man erhält:

$$r_n = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot m_e} \cdot \frac{e^2}{v_n^2} \Rightarrow r_n = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot m_e} \cdot \frac{e^2}{\left(\frac{e^2}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot h} \cdot \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{h^2 \cdot \epsilon_0}{\pi \cdot m_e \cdot e^2} \cdot n^2 \quad (52)$$

Das erste Bohrsche Postulat ergibt also für jede Quantenzahl n bestimmte, feste Bahnen, deren Radien sich allein aus Naturkonstanten berechnen lassen.

Setzt man v_n und r_n in die Gleichungen (47) und (48) zur Berechnung von kinetischer und potenzieller Energie ein, erhält man für die Gesamtenergie

$$E_n = -\frac{m_e \cdot e^4}{8 \cdot \epsilon_0^2 \cdot h^2} \cdot \frac{1}{n^2} \quad (53)$$

Die nachfolgende Tabelle zeigt für die ersten Quantenzahlen $n = 1 \dots 5$ die Bahnradien sowie die Bahnenergien der Elektronen für das Elektron des Wasserstoffatoms, wie sie sich aus den Bohrschen Postulaten ergeben.

n	1	2	3	4	5	-
r_n	52,9	212	476	847	1323	pm
E_n	-13,6	-3,40	-1,51	-0,85	-0,54	eV

Der Bahnradius für $n = 1$ ergibt einen Atomdurchmesser von ca. 1 Angström, wie er auch bereits von Thomson und Rutherford festgestellt wurde.

3.1.2.2 Die Spektralserien des Wasserstoffs

Trägt man die eben berechneten Bahnenergien in ein Schema ein, das auf der Hochachse die Energien der jeweiligen Bahnen darstellt, erhält man ein sog. Energieniveauschema oder Termschema (vergl. Abb. 32). (Man beachte, das es in dieser Darstellung keine Abszissenachse gibt!)

Nach dem zweiten Bohrschen Postulat kann ein Elektron die Bahn wechseln, wenn es ein Energiequant absorbiert oder emittiert, dessen Energie nach Glg. (45) der Differenz der Bahnenergien entspricht. Drei dieser Prozesse sind in der Abbildung dargestellt: Im ersten Fall (links) wird ein Photon der Energie $h \cdot f_1$ eingestrahlt, die ausreicht, das Elektron vom Energieniveau mit der Bahnquantenzahl $n = 1$ auf das Niveau $n = 3$ zu heben. Anschließend geht das Elektron unter Emission eines Photons mit der Energie $h \cdot f_2$ auf die Bahn $n = 2$ zurück, um von dort aus in den Grundzustand zurückzukehren, wobei es ein weiteres Photon mit der Energie $h \cdot f_3$ aussendet. Kennt man die Bahnenergien, die zu den einzelnen Quantenzahlen gehören, kann man aus den Energiedifferenzen folglich die möglichen Photonenenergien und damit die Wellenlängen (die Farbe) des Lichtes feststellen, die von dem Atom absorbiert oder emittiert werden können. Nach Glg. (45) und (53) gilt für die Photonenenergien

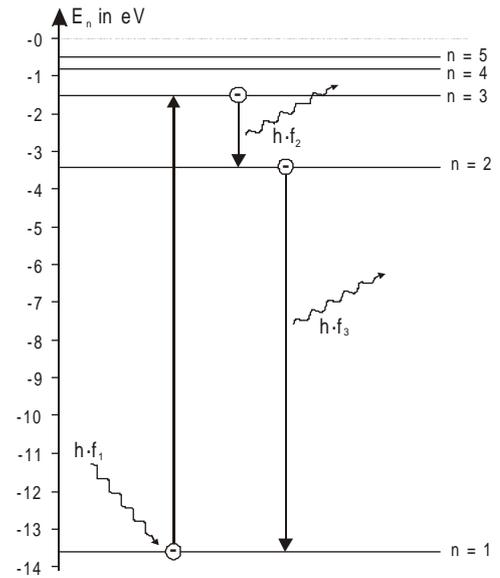


Abb. 32: Die ersten fünf Bahnenergien des Wasserstoffelektrons mit Bahnübergängen durch Absorption ($h \cdot f_1$) bzw. Emission von Photonen

$$\Delta E = E_{n_2} - E_{n_1} = -\frac{m_e \cdot e^4}{8 \cdot \epsilon_0^2 \cdot h^2} \cdot \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) = \frac{m_e \cdot e^4}{8 \cdot \epsilon_0^2 \cdot h^2} \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad (54)$$

Nach Glg. (45) erhält man mit $\Delta E = h \cdot f$ auch die Frequenz f und daraus die Wellenlänge λ der Photonen:

$$f = \frac{\Delta E}{h} = \frac{m_e \cdot e^4}{8 \cdot \epsilon_0^2 \cdot h^3} \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad (55)$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{8 \cdot \epsilon_0^2 \cdot h^3 \cdot c}{m_e \cdot e^4} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)} \quad (56)$$

Die nachfolgende Tabelle enthält für die ersten fünf Quantenzahlen die Wellenlängen der möglichen Übergänge zwischen den zugehörigen Energieniveaus (Angaben in nm):

n1 \ n2	1	2	3	4	5
1	-	122	103	97	95
2	122	-	656	486	434
3	103	656	-	1875	1282
4	97	486	1875	-	4050
5	95	434	1282	4050	-

Um die Wellenlänge eines Quants zu erhalten, das absorbiert werden muss, um einen Bahnübergang von $n_1 = 2$ zu $n_2 = 4$ zu ermöglichen, geht man in Zeile 2 zu Spalte 4 und findet dort die Angabe $\lambda = 486$ nm. Die Wellenlänge, die bei einem Übergang von $n_1 = 5$ zu $n_2 = 2$ als Quant emittiert wird, findet man analog, indem man in Zeile 5 zu Spalte 2 geht, dort findet man $\lambda = 434$ nm.

Wie man sieht, fallen die emittierten Wellenlängen bei Übergängen von höheren Niveaus auf das Zielniveau $n = 2$ in den Bereich des sichtbaren Lichtes, während für $n = 1$ UV-Licht und für $n > 3$ IR-Licht emittiert oder absorbiert wird. Die experimentelle Bestätigung dieser Emissionslinien war eine grandiose Bestätigung für das Bohrsche Atommodell, doch leider hat dieses Modell eine Reihe von Einschränkungen, die es für andere Zwecke nahezu unbrauchbar macht.

3.1.2.3 Die Grenzen des Bohrschen Atommodells

Das Bohrsche Atommodell erklärt Energiezustandsänderungen der Elektronen in der Hülle des Wasserstoffatoms, die mit experimentell gewonnenen Ergebnissen gut übereinstimmen. Die Aussagen über die „Konstruktion“ des Atoms sind dagegen hypothetisch, lediglich die äußere Wechselwirkung mit Quanten wird zutreffend beschrieben, ohne dass sie als Beweis für die Richtigkeit der zugrunde liegenden Atomvorstellung gelten können. Die sich aus den Postulaten ergebenden „Konstruktionsmerkmale“ lassen allerdings erkennen, dass dieses Modell in einigen anderen Punkten nicht der wahrnehmbaren Realität entspricht.

Da sich das einzige Elektron auf einer Kreisbahn bewegt, hat das Atom seine bekannte Ausdehnung von ca. 1 Angström lediglich in der Bahnebene des Elektrons, senkrecht zu dieser Linie ist das Atom „flach“, besteht also quasi aus einer Kreisscheibe. Dies widerspricht der Tatsache, dass das Wasserstoffatom in allen drei Raumrichtungen rotationssymmetrisch ist, was durch die Gesetze der Gastheorie bestätigt wird (vergl. Abb. 33).

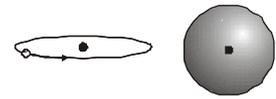


Abb. 33: Nach Bohr ist das Atom flach (links), tatsächlich aber kugelsymmetrisch (rechts)

Sowohl Bahnradius als auch Bahngeschwindigkeit des Elektrons sind durch Naturkonstanten genau definiert. Nach der Heisenbergschen Unschärferelation können aber Ort und Impuls nicht gleichzeitig genau bekannt sein. Gleiches trifft für die Linienspektren zu, die nach Bohr genau definierten Energiebeträgen zuzuordnen sind. Genaue Messungen zeigen aber, dass die Linien eine endliche Breite besitzen (vergl. Abb. 34), die durch die Lebensdauer des angeregten Zustandes definiert wird, für die das Bohrsche Modell keine Aussagen treffen kann.

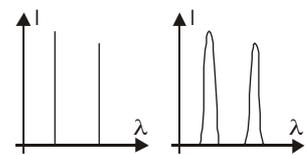


Abb. 34: Nach Bohr ergeben sich diskrete Linien (links), tatsächlich haben sie aber eine endliche Breite (rechts)

Eine Übertragung des Modells auf andere Atome gelingt nur, wenn dieses so weit ionisiert wird, dass nur noch ein Elektron in der Elektronenhülle verbleibt (sog. Wasserstoff-ähnliche Atome, z.B. einfach ionisiertes Helium oder doppelt ionisiertes Lithium). Bei mehr als einem Elektron in der Hülle versagt das Modell völlig.

3.1.3 Das quantenphysikalische Atommodell des linearen Potenzialtopfes

Das Versagen der klassischen Physik zur Beschreibung von Vorgängen in der Atomhülle erzwingt eine neue Denkweise, die sich davon abkehrt, erst eine Vorstellung von dem zu untersuchenden Objekt zu entwickeln und dann daraus Schlussfolgerungen zu ziehen. Statt dessen beschränkt man sich auf das beobachtbare, also z.B. emittierte oder absorbierte Photonen, die Intensitätsverteilung der Spektrallinien und die Wellenlänge der Elektronen. Heisenberg legte 1925 mit seiner Matrizenmechanik den Grundstein für ein abstraktes Beschreibungsmodell, der *Quantenmechanik*. Ein Jahr später veröffentlichte Schrödinger auf Grundlage der deBroglie-Welle im Rahmen seiner *Wellenmechanik* ebenfalls ein Modell, dass durch stehende Wellen in der Lage war, Aussagen über die Antreffwahrscheinlichkeit von gebundenen Elektronen zu machen.

Grundlage des Modells von Schrödinger ist das Modell des Potenzialtopfes. Es beruht auf folgenden Prämissen:

Das Elektron hält sich in einem abgeschlossenen Raum auf, den es nicht verlassen kann.

Innerhalb dieses Raumes kann sich das Elektron kräftefrei bewegen.

Die räumlichen Beziehungen sind in der Darstellung recht aufwändig, zum Verständnis genügt aber bereits die Reduktion auf eine Dimension. In diesem Modell des linearen Potenzialtopfes wirken innerhalb des Topfes keine Kräfte auf das Elektron, also hat das Elektron die potenzielle Energie $E_{\text{pot}} = 0$. Um in die Wände des Topfes einzudringen, muss das Elektron eine unendlich hohe Energie aufwenden, damit ist es innerhalb des Topfes eingeschlossen (Abb. 35).

Der Ort des Elektrons in diesem Topf ist nicht festgelegt, es kann also überall in dem Topf angetroffen werden. Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen an einem bestimmten Ort im Topf anzutreffen, wird durch das Quadrat der Wellenfunktion beschrieben. Außerhalb des Topfes ist diese Wahrscheinlichkeit natürlich gleich Null.

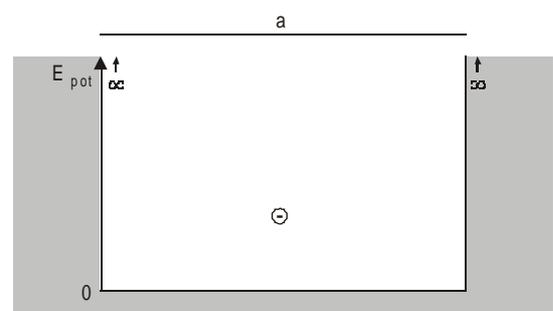


Abb. 35: Ein Elektron im eindimensionalen Potenzialtopf der Länge a . Die potenzielle Energie an den Wänden des Topfes geht gegen unendlich, im grau gezeichneten Bereich kann sich das Elektron deswegen nicht aufhalten.

Da sich das Teilchen nicht fortbewegt, sondern im Inneren des Topfes bleibt, handelt es sich hier um eine stehende Welle mit Schwingungsknoten an den beiden Enden des Topfes. Für diese Wellen gilt (wie auch bei mechanischen stehenden Wellen) die Beziehung:

$$n \cdot \frac{\lambda}{2} = a \quad (57)$$

d.h., das ganzzahlige Vielfache der halben Wellenlänge muss in die Strecke der Länge a „passen“. Bezeichnet man die Wellenfunktion mit Ψ (Psi), so wird die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons an einem Ort durch $|\Psi|^2$ angegeben. Abb. 36 zeigt in der oberen Hälfte die stehende Welle Ψ und in der unteren Hälfte die zugehörigen Aufenthaltswahrscheinlichkeiten des Elektrons.

Daraus kann man entnehmen, dass die Wahrscheinlichkeit, das Elektron irgendwo anzutreffen, nicht über den ganzen Topf gleichmäßig verteilt ist, sondern je nach Schwingungszustand an verschiedenen Stellen des Topfes ein Maximum hat.

Nach deBroglie gilt zwischen Impuls und Wellenlänge eines Quantenobjektes die Beziehung

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (58)$$

Die Gesamtenergie setzt sich zusammen aus der potenziellen und der kinetischen Energie. Da hier nicht relativistisch gerechnet werden kann, ist die potenzielle Energie gleich Null und für die kinetische Energie gilt:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v^2 \quad (59)$$

Mit der Gleichung für den Impuls $p = m_e \cdot v$ ergibt sich aus Glg. (59) die Beziehung

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v \cdot m_e \cdot v = \frac{p^2}{2 \cdot m_e} \quad (60)$$

Löst man Glg. (57) nach λ auf und setzt diesen Term für λ in Glg. (58) ein, so erhält man für p

$$\lambda = \frac{2 \cdot a}{n} = \frac{h}{p} \Rightarrow p = \frac{n \cdot h}{2 \cdot a} \quad (61)$$

Glg. (61) eingesetzt in Glg. (60) ergibt für die Energie des Teilchens

$$E_{\text{kin}} = \frac{h^2}{8 \cdot m_e \cdot a^2} \cdot n^2 \quad (62)$$

Die Energie des Teilchens hängt also neben der Strecke a nur noch von Naturkonstanten und dem Quadrat der natürlichen Zahl n ab, ist also gequantelt. Analog zu Glg. (45), die Energieübergänge zwischen verschiedenen Quantenzuständen beschreibt, gilt auch hier:

$$E_{\text{ph}} = h \cdot f = E_{n_2} - E_{n_1} = \Delta E \quad (63)$$

In Zusammenhang mit Glg. (62) erhält man daraus

$$\Delta E = \frac{h^2}{8 \cdot m_e \cdot a^2} \cdot (n_2^2 - n_1^2) \quad (64)$$

Man beachte, dass hier die kinetische Energie mit zunehmenden Quantenzahlen n zunimmt, während beim Bohrschen Modell der Betrag der Gesamtenergie abnimmt! Da letztere aber negativ ist, entspricht diese ebenfalls einer Zunahme der Energie, steht also im Einklang mit dem Potenzialtopf-Modell.

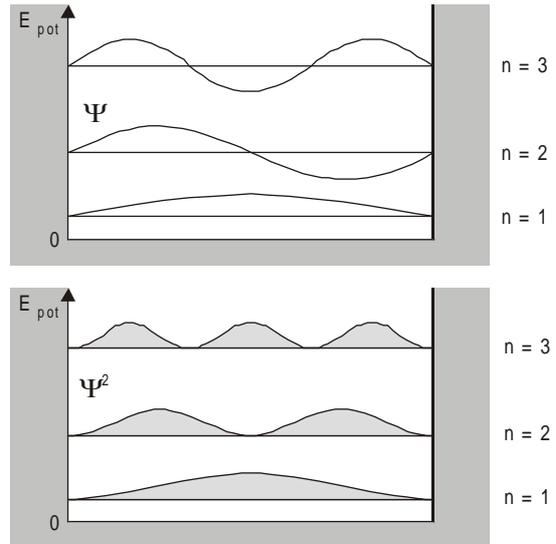


Abb. 36: Die ersten drei möglichen Schwingungszustände des eingeschlossenen Elektrons als stehende Welle im Potenzialtopf, darunter die zugehörigen Aufenthaltswahrscheinlichkeiten.

3.1.3.1 Bahn- und Übergangsenergien beim Potenzialtopf-Modell

Anders als beim Bohrschen Atommodell wird hier die Gesamtenergie eines Elektrons ausschließlich durch seine kinetische Energie bestimmt, da in den Voraussetzungen die potenzielle Energie auf Null gesetzt wurde. Nach den Aussagen des ersten Absatzes in Kap. 3.1.3 muss das Modell lediglich zutreffende Voraussagen über die Quantenenergien emittierter oder absorbierter Photonen liefern, die Absolutenergien der einzelnen Quantenzustände sind nebensächlich, da sie einer direkten Messung nicht zugänglich sind.

Dennoch kann man diese Energien berechnen, ihre Kenntnis steht in keinem Widerspruch zur Heisenbergschen Unschärferelation, da der Ort des Teilchens innerhalb des Potenzialtopfes der Länge a nicht näher bestimmt ist. Wie man Abb. 36 entnehmen kann, hat das Elektron bereits im niedrigsten Quantenzustand $n = 1$ eine Energie größer Null, die man als Nullpunktsenergie bezeichnet. Nach dem Bohrschen Atommodell erhält man hierfür den Wert $E_{n=1} = -13,6 \text{ eV}$, während sich bei gleichem Atomradius ($a = 1 \cdot 10^{-10} \text{ m}$) aus dem Potenzialtopf-Modell ergibt:

$$E_{n=1} = \frac{h^2}{8 \cdot m_e \cdot a^2} \cdot 1^2 = \frac{(6,624 \cdot 10^{-34} \text{ Js})^2}{8 \cdot 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (1 \cdot 10^{-10} \text{ m})^2} = 6,025 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 37,6 \text{ eV}$$

Dieser Wert ist also knapp um den Faktor 3 größer als bei Bohr. Dies liegt vor allem daran, dass anders als bei Bohr der Bahnradius nicht mehr fest vorgegeben ist, sondern durch die Wellenfunktion des Elektrons definiert wird. Außerdem beruhen obige Rechnungen auf einem eindimensionalen Potenzialtopf, tatsächlich aber ist das Wasserstoffatom kugelsymmetrisch, was einen dreidimensionalen Potenzialtopf nahelegt, dessen mathematische Behandlung aber zu weit führen würde.

So erhält man z.B. aus Glg. (64) die beobachtbare Spektrallinie von 659 nm beim Übergang von $n_1 = 3$ zu $n_2 = 2$ nur, wenn man als Größe des (linearen) Potenzialtopfes den Wert $a = 1 \cdot 10^9 \text{ m}$ annimmt, also 10-mal so groß wie bei Bohr:

$$\Delta E_{3 \rightarrow 2} = \frac{h^2}{8 \cdot m_e \cdot a^2} \cdot (3^2 - 2^2) = 5,423 \cdot 10^{-19} \text{ J} - 2,410 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 3,012 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1,88 \text{ eV}$$

Bis auf das Problem, dass Aussagen über die Größe des Potenzialtopfes und damit der „Größe“ des Atoms (genauer: der räumlichen Wellenfunktion des Elektrons) gemacht werden müssen, vermeidet dieses Modell jedoch die Beschränkungen des Bohrschen Atommodells.

3.1.3.2 Anwendungen des Potenzialtopf-Modells

Statt ausschließlich für das Wasserstoffatom zutreffende Aussagen zu erhalten wie bei Bohr, lässt sich das Potenzialtopfmodell zur Erklärung einer Vielzahl von Prozessen heranziehen, die nicht nur für die Atomhülle, sondern auch für den Atomkern oder Moleküle zutreffen.

Die Elektronen zweier eng benachbarter, aber räumlich getrennter Atome verfügen jeder über einen Potenzialtopf der Breite a , zu dem eine bestimmte Nullpunktsenergie gehört. Nähern sich die Atome weiter an, überlappen sich die beiden Potenzialtöpfe und ab einem bestimmten Zeitpunkt vergrößert sich die Topfbreite von a auf $2 \cdot a$. Da das Quadrat von a im Nenner des Terms zur Bestimmung der Energie steht, reduziert sich die Nullpunktsenergie der beiden Elektronen auf ein Viertel, die frei werdende Energie steht nun als Bindungsenergie des entstehenden Moleküls zur Verfügung.

Versucht man, ein Elektron in einem Potenzialtopf in der Größenordnung eines Atomkerns ($1 \cdot 10^{-14} \text{ m}$) „einzusperren“, verfügt es über eine Nullpunktsenergie von ca. 3761 MeV . Diese Energie ist um mehrere Zehnerpotenzen höher als die (endliche) Höhe des der Potenzialwalls des Kerns von etwa 10 MeV , könnte von diesem also nicht aufgehalten werden und würde den Kern sofort verlassen. Statt von Nullpunktsenergie spricht man deswegen in diesem Zusammenhang auch von der *Lokalisierungsenergie*. Entsteht also bei einem Zerfallsprozess im Kern ein Elektron, so wird dieses sofort aus dem Kern emittiert (β -Strahlung).

Ein räumliche Wellenfunktion im Grundzustand stellt sich als eine Kugel dar. Im angeregten Zustand treten Schwingungsknoten auf, die verschiedene Formen annehmen können: Im einfachsten Fall entstehen konzentrische Kugelschalen, es können aber auch paarweise asymmetrische (nierenförmige) Kugelschalen oder Kreisebenen entstehen. Diese werden im räumlichen Modell durch die Nebenquantenzahl ℓ beschrieben, diese stimmt mit den aus der Chemie bekannten als s, p, d und f bezeichneten Zuständen überein und kennzeichnet die sog. *Aufenthaltswahrscheinlichkeitsbereiche* (AWB) der jeweiligen Elektronenkonfigurationen.

3.2 Prozesse in der Atomhülle

Ziel der verschiedenen Atommodelle ist es, für die in Experimenten zu beobachtenden Phänomene eine Deutung zu finden, die sich in einer gemeinsamen widerspruchsfreien Theorie darstellen lassen. Es hat sich dabei gezeigt, dass die klassische Mechanik hier weitgehend versagt, das quantenphysikalische Modell jedoch - wenn auch auf einem sehr abstrakten Niveau - sich in den unterschiedlichsten Situationen zu bewähren scheint.

3.2.1 Emissions- und Absorptionsspektren

Zur Untersuchung der bei dem Energieübergang zwischen verschiedenen Energieniveaus der Atomhülle beteiligten Photonen nutzt man die Welleneigenschaft der emittierten Photonen, indem man ihre Wellenlänge z.B. durch ein optisches Gitter bestimmt. Dazu wird aus dem emittierten Licht durch einen Spalt ein hinreichend kleiner Ausschnitt der Wellenfront ausgeblendet und durch eine Linse auf einen Schirm projiziert. Im Strahlengang zwischen Linse und Schirm befindet sich das Gitter, an dessen Gitterspalten die als parallel anzusehenden Wellenfronten gebeugt werden. Auf dem Schirm interferieren die einzelnen Wellenfronten und erzeugen ein charakteristisches Schirmbild mit ausgeprägten Helligkeitsmaxima, deren Position von der Wellenlänge abhängt.

Als Lichtquelle verwendet man gasgefüllte Röhren (sog. Spektrallampen), in denen durch zwei Elektroden ein elektrisches Feld erzeugt wird. Bei hinreichend hoher Spannung werden Ionen, die z.B. durch natürliche Umgebungsstrahlung in jedem Gas vorhanden sind oder durch spontan emittierte Elektronen an den Elektroden erzeugt werden, genügend beschleunigt, um weitere Ionen durch Stöße mit den Gasatomen zu erzeugen. Die dabei frei gewordenen Elektronen rekombinieren wieder mit den Ionen, indem sie die frei gewordenen Energieniveaus besetzen. Dabei muss - wie in allen Atommodellen gezeigt - ein Photon emittiert werden. Bei nicht gasförmigen Stoffen (wie z.B. Metallen) wird dabei der zu untersuchende Stoff durch eine geeignete Heizvorrichtung zunächst verdampft. Die Analyse des bei der Gasentladung entstehenden Spektrums erlaubt die Bestimmung der bei diesen Prozessen auftretenden Energieübergänge und lässt somit Rückschlüsse auf die beteiligten Energieniveaus der Atome zu. Ein entsprechender Aufbau sowie ein mögliches Schirmbild sind in Abb. 37 wiedergegeben. Durch geeignete Gitter und hochauflösende Filme anstelle des Schirmes sind damit Auflösungen der Wellenlängen bis auf 1/10 nm möglich.

Sind der Schirmabstand a und die der Spaltabstand d des Gitters bekannt, so kann man aus dem Abstand s des n -ten Interferenzmaximums vom Hauptmaximum auf dem Schirm die Wellenlänge und daraus die Frequenz sowie die Energie des zugehörigen Photons berechnen. Für die obige Anordnung gilt

$$\lambda = \frac{d}{n} \cdot \sin\left(\arctan\left(\frac{a}{s}\right)\right) \tag{65}$$

In der *Absorptionsspektroskopie* leitet man das Licht einer Lichtquelle bekannter spektraler Verteilung durch den Dampf des zu untersuchenden Materials und untersucht das transmittierte Licht wie oben in einem Gitterspektrometer. Abb. 38 zeigt den entsprechenden Aufbau (ohne das nachgeschaltete Spektrometer). In diesem Licht ist die Intensität derjenigen Wellenlänge(n) verringert, deren Photonenenergie ausreicht, um in dem zu untersuchenden Material einen Übergang eines Elektrons von einem niedrigeren zu einem höheren Energieniveau auszulösen. Bei Verwendung von weißem Licht erkennt man in dem sonst kontinuierlichen Spektrum dunkle Linien. Auf diese Weise hat z.B. *Fraunhofer* im Sonnenlicht die Linien eines unbekanntes Elementes nachgewiesen, dem er wegen seiner Quelle den Namen Helium gegeben hat. Die Verschiebung solcher Absorptionslinien dient in der Astronomie zur galaktischen Geschwindigkeitsmessung.

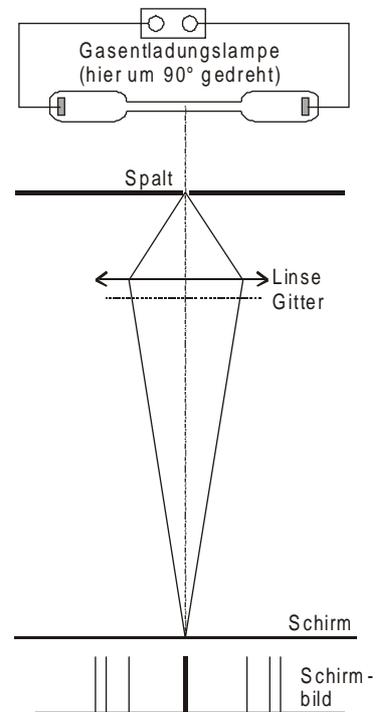


Abb. 37: Prinzipielle Anordnung zur Aufnahme des Spektrums einer Gasentladungslampe mit einem Gitterspektrometer

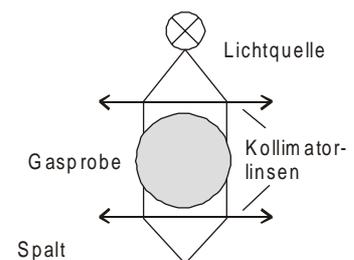


Abb. 38: Durchleuchtung einer Gasprobe mit weißem Licht zur Bestimmung des Absorptionsspektrums

3.2.2 Franck-Hertz-Versuch

Bei diesem Versuch wird eine mit Neon unter geringem Druck gefüllte Röhre verwendet. Aus einer geheizten Kathode treten durch Glühemission Elektronen aus, die durch das elektrische Feld zwischen Kathode und Gitter zum Gitter hin beschleunigt werden. Eine Anodenblech hinter dem Gitter wird mit einer Spannung versehen, die so gepolt ist, dass die das Gitter passierenden Elektronen geringfügig abgebremst werden, bevor sie die Anode erreichen (vergl. Abb. 39). Die Kathode ist möglichst flächig angelegt und mit einem Diffusorgitter versehen, damit die Elektronen möglichst breit gefächert in den Röhrenraum eintreten. Die Spannung U_g wird auf einen Wert von etwa 1 .. 2 V eingestellt, die Beschleunigungsspannung U_a zwischen Kathode und Gitter kann in einem Bereich von 0 .. 80 V stufenlos geregelt werden.

Ohne die Gasfüllung der Röhre würde man - wie von der Vakuumdiode bekannt - einen Anstieg des Anodenstromes I_g mit steigender Beschleunigungsspannung nach Abb. 40) erwarten, sobald die Beschleunigungsspannung größer ist als die Bremsspannung U_g , da dann die Energie der Elektronen ausreicht, trotz der Abbremsung im Feld zwischen Gitter und Anode die Anode zu erreichen.

Bei der hier vorliegenden gasgefüllten Röhre können die Elektronen ihrem Weg zur Anode nicht ungestört folgen, da sie immer wieder von den Gasatomen abgelenkt werden. Man würde also erwarten, dass der Verlauf des Stroms dieser Röhre zwar qualitativ dem der Vakuumröhre entspricht, der Strom insgesamt jedoch bei sonst gleichen Bedingungen geringer sein wird.

Tatsächlich ergibt sich jedoch ein gänzlich anderes Bild, wie es in Abb. 41 dargestellt ist. Bis zum Erreichen der Spannung U_g fließt erwartungsgemäß kein Strom, die Energie der beschleunigten Elektronen reicht nicht aus, hinter dem Gitter gegen das Bremsfeld anzulaufen. Anschließend steigt der Strom ebenfalls erwartungsgemäß zunächst an, sinkt dann aber wieder bis zu einem deutlich erkennbaren Minimum ab. Dieser Verlauf wiederholt sich mehrere Male, wobei die Minima immer weniger ausgeprägt sind und anschließend verschwinden. In der Röhre zeigt sich gleichzeitig mit dem Auftreten des ersten Minimums eine flächige Leuchterscheinung parallel zu den Elektroden, die sich am Gitter beginnt auszubilden und mit zunehmender Beschleunigungsspannung in Richtung Kathode wandert. Bei Erreichen des zweiten Stromminimums bildet sich eine weitere leuchtende Fläche aus usw. Eine genaue Analyse des Ortes der Stromminima ergibt, dass diese äquidistant sind und bei dem Füllgas Neon einen Abstand von ca. 20 V aufweisen. Verwendet man statt Neon Quecksilberdampf, bilden sich ebenfalls regelmäßige Stromminima aus, deren Abstand beträgt nun jedoch 4,9 V, allerdings ist hier keine sichtbare Leuchterscheinung zu erkennen.

Die Deutung dieses Experimentes ist mit den Mitteln der klassischen Physik nicht möglich, wohl aber mit einer quantenhaften Betrachtung der Prozesse in der Atomhülle: Die im elektrischen Feld beschleunigten Elektronen aus der Kathode kollidieren mit den Gasatomen, führen also Stöße aus. Solange die Energie der Elektronen unterhalb eines bestimmten Grenzwertes bleibt, wird keine Energie an das Atom übertragen, das Elektron ändert lediglich seine Richtung, ohne dabei Energie zu verlieren - es führt also elastische Stöße aus. Wird dagegen der Grenzwert überschritten, reicht die Energie des stoßenden Elektrons aus, um ein Hüllenelektron des Gasatoms in eine energiereichere Bahn zu befördern, das Hüllenelektron nimmt also einen bestimmten Energiebetrag auf, während das stoßende Elektron diesen Energiebetrag verliert - dies entspricht einem unelastischen Stoß. Findet dieser Stoß so dicht vor dem Gitter statt, dass es auf der noch verbleibenden Wegstrecke nicht mehr genügend Energie aufnimmt, kann es nicht mehr gegen das Bremsfeld anlaufen und trägt somit nicht mehr zum Anodenstrom I_g bei. Andernfalls wird es erneut beschleunigt und kann nun entweder das Gegenfeld überwinden oder sogar ein weiteres Mal ein Gasatom anregen. Das angeregte Elektron des Gasatoms dagegen fällt nach einiger Zeit wieder in seinen Ausgangszustand direkt (bei Quecksilber) oder über Zwischenniveaus (bei Neon) zurück, wobei es die jeweiligen Energiedifferenzen als Photon abgeben muss, was die Leuchterscheinungen erklärt. Diese treten also immer an dem Ort auf, wo die freien Elektronen die für einen unelastischen Stoß erforderliche Mindestenergie erreicht haben.

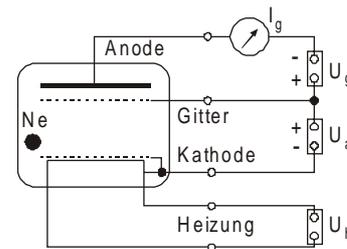


Abb. 39: Bezeichnung und Beschaltung der Röhrenelektroden beim Franck-Hertz-Versuch

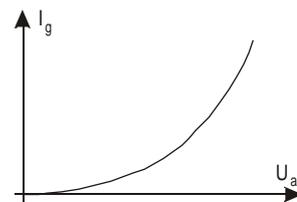


Abb. 40: Qualitativer Verlauf des Anodenstromes bei einer Vakuumröhre

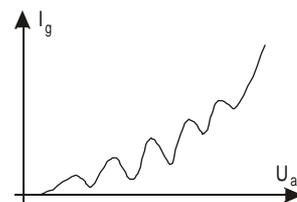


Abb. 41: Tatsächlicher Verlauf des Anodenstromes bei einer gasgefüllten Röhre

3.2.3 Röntgenspektren

Bereits in Kap. 2.1.2 wurde kurz auf Röntgenspektren eingegangen, dort ging es um die Interpretation der kurzwelligen Grenze der Strahlung zur Bestimmung des Planckschen Wirkungsquantums. Die entsprechende Abbildung ist in Abb. 42 noch einmal wiedergegeben. Hier soll nun auf die beiden auffälligen Peaks eingegangen werden, die in jedem dieser Spektren zu erkennen sind und unabhängig von der Beschleunigungsspannung immer bei der gleichen Wellenlänge auftreten. Dabei sollte es nun nicht mehr überraschen, dass der Ort dieser Peaks vom in der Röhre verwendeten Anodenmaterial abhängt.

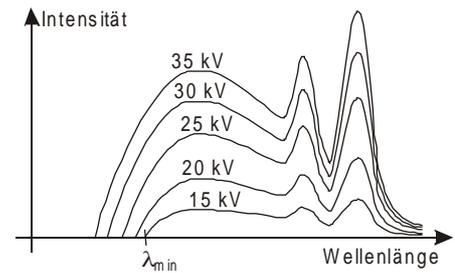


Abb. 42: Röntgenspektren einer Kupferanode bei verschiedenen Beschleunigungsspannungen

Die Röntgenstrahlung entsteht, wenn in der Röntgenröhre die zwischen Kathode und Anode beschleunigten Elektronen auf das Anodenmaterial treffen. Wie beim Rutherford'schen Streuversuch treffen sie auf die im Kristallgefüge gebundenen Metallatome, werden aber anders als die dort verwendeten α -Teilchen bereits von den Hüllenelektronen der Atome erheblich beeinflusst. Die meisten eintreffenden Elektronen werden durch die abstoßenden Coulombkräfte der Elektronenhülle lediglich abgebremst, wobei sie Energie in Form von Strahlung abgeben. Das Maß dieser Abbremsung ist zufällig verteilt und hängt davon ab, wie das ankommende Elektron auf die Elektronenhülle trifft. Im Extremfall verliert es beim Durchgang durch ein einziges Atom bereits seine gesamte Energie, die dabei abgestrahlte Energiemenge erscheint als ein Photon, dessen Energie $h \cdot f$ gleich der Energie $e \cdot U$ des Elektrons ist, was die kurzwellige Grenze der Röntgenstrahlung erklärt. Andere Elektronen geben ihre Energie in mehreren nicht vorherbestimmten Schritten ab. Diese beiden Prozesse bilden den kontinuierlichen Anteil der Röntgenstrahlung, diese wird deswegen auch als *Bremsstrahlung* bezeichnet.

Bei einem zweiten denkbaren Prozess führt ein ankommendes Elektron jedoch einen unelastischen Stoß mit einem der Hüllenelektronen aus. Da ihre Energie sehr hoch ist, beschränken sich diese Stöße jedoch nicht allein auf die äußeren Elektronen, sondern es kann auch ein Elektron betroffen sein, das sich in der innersten Schale der Hülle befindet und somit eine sehr hohe Bahnenergie besitzt. Dennoch ist die Energie des stoßenden Elektrons hinreichend groß, dass es aus seinem Niveau entfernt wird und die Elektronenhülle verlässt. Da nun ein inneres Energieniveau unbesetzt ist, erfolgt ein Übergang eines Elektrons aus einem höheren Energieniveau in das tiefer liegende, wobei ein Photon emittiert wird, das die Energiedifferenz zwischen den beiden Niveaus transportiert. Da nun dort wiederum ein Niveau frei geworden ist, findet dieser Prozess ggf. noch mehrmals mit abnehmenden Energiedifferenzen statt, wobei die zugehörigen Photonenenergien jedoch in dem Spektrum nicht zu erkennen sind, da sie in der Bremsstrahlung untergehen.

In der Behandlung des Bohrschen Atommodells ergibt sich die potenzielle Energie des Elektrons durch die Coulombanziehung zwischen der positiven Kernladung und dem negativen Elektron. Bei höheren Ordnungszahlen ist die Kernladung Z größer als 1 (für Wasserstoff ist $Z = 1$), diese geht aber quadratisch in den Term für die Gesamtenergie des Elektrons ein. *Mosley* hat 1913 auf der Grundlage des Bohrschen Atommodells den Zusammenhang zwischen Kernladungszahl Z und der Wellenlänge der charakteristischen Peaks bei Röntgenspektren untersucht und festgestellt, dass folgende Gesetzmäßigkeit besteht:

Mosleysches Gesetz: Die Energie der charakteristischen Röntgenstrahlung ist proportional zum Quadrat der reduzierten Kernladungszahl Z^* .

Die reduzierte Kernladungszahl Z^* ergibt sich aus der Überlegung, dass sich auf der innersten Bahn der Atomhülle zwei Elektronen befinden, wobei das eine Elektron eine Ladung des Kerns abschirmt. Mit guter Näherung kann man setzen:

$$Z^* = Z - 1 \tag{66}$$

Die Energie des Elektrons beim Wasserstoff im Grundzustand ($n = 1$) beträgt 13,6 eV, somit erhält man für die Übergangsenergien auf das Niveau $n = 1$ bei Elementen mit größerer Ordnungszahl Z

$$\Delta E = 13,6 \text{ eV} \cdot (Z - 1)^2 \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \tag{67}$$

Für Kupfer ($Z = 26$) erhält man hieraus für den Übergang von $n = 2$ auf $n = 1$ die Wellenlänge $\lambda_{2,1} = 155 \text{ pm}$ und für den Übergang von $n = 3$ auf $n = 1$ die Wellenlänge $\lambda_{3,1} = 140 \text{ pm}$, was sehr gut mit den gemessenen Werten übereinstimmt.