Infinitesimalrechnung - auch kleinste Schritte führen zum Ziel

Ausgangssituation (Tangentensteigung)
Gesucht ist die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion f(x) im Punkt A an der Stelle x_1.

Lösungsweg (Tangentensteigung)
Die Gleichung einer Sekante lässt sich bestimmen, wenn zwei Punkte bekannt sind, die auf der Sekante liegen. Als den ersten Punkt wählt man den Punkt A, den zweiten Punkt B wählt man beliebig auf dem Graphen von f(x).
Nähert man den Punkt B dem Punkt A, so gleicht sich die Sekante s(x) immer mehr der Tangente t(x) an.

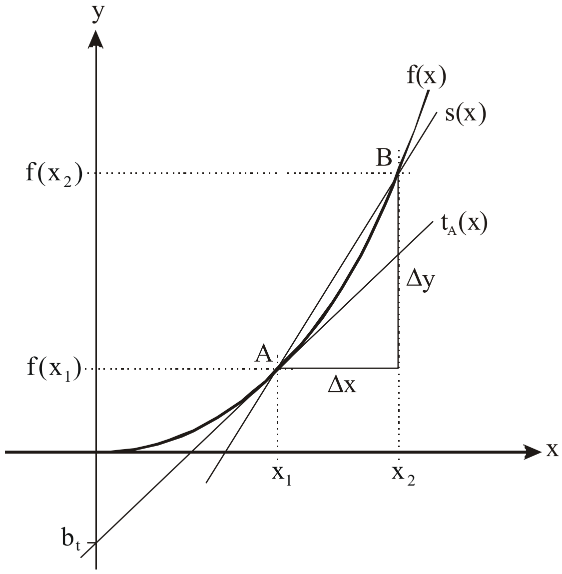

Abb. 1: Graph der Funktion f(x) = x² mit der Sekante s(x) durch die Punkte A und B und der Tangente $t_A(x)$ am Punkt A

Zur Bestimmung der Steigung der Sekante s(x) verwendet man ein Steigungsdreieck.
Für die Steigung m_s gilt dann:

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad (1)$$

Ersetzt man den x_2 durch den Ausdruck $x_2 = x_1 + \Delta x$, so erhält man

$$m_s = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{x_1 + \Delta x - x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \qquad (2)$$

Um die Steigung der Tangente zu erhalten, muss Δx so klein wie möglich gewählt werden. Ist $\Delta x = 0$, geht die Sekante in die Tangente über. Dies nennt man einen *Grenzübergang*. Solange dieser Übergang nicht vollzogen ist, ist Δx ungleich 0, sonst wäre der Nenner in (2) unzulässig. Die „Absicht", diesen Grenzübergang zu vollziehen, kennzeichnet man in der Mathematik mit dem Symbol *lim*, dabei wird unter dem Symbol angegeben, welche Größe sich welchem Grenzwert nähern soll. Für die Steigung der Tangente ergibt sich daraus die Formulierung

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \qquad (3)$$

(gelesen: „m-t ist der Limes für Delta-x gegen Null von f von x-eins plus Delta-x minus f von x1 geteilt durch Delta-x.").
Weil der Quotient nach Glg. (2) der Quotient zweier Differenzen ist, bezeichnet man diesen als *Differenzenquotient*, während der Quotient nach Glg. (3) eigentlich den Quotienten zweier Differenzen wiedergibt, die beide den Wert 0 haben; diesen Quotienten bezeichnet man deshalb als *Differenzialquotient*.

Beispiel für die Funktion f(x) = x²
Ist die Funktion f(x) bekannt, können die entsprechenden Funktionswerte eingesetzt werden, um den Quotienten näher zu bestimmen. Der Graph in Abb. 1 gibt z.B. (angenähert) den Graphen der Funktion

$$f(x) = x^2 \qquad (4)$$

wieder. Setzt man die Argumente $(x_1 + \Delta x)$ und x_1 von Glg (3) in diese Funktion ein, erhält man

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_1 + \Delta x)^2 - x_1^2}{\Delta x} \qquad (5a)$$

Anwenden der binomischen Formel für den ersten Zählerterm liefert daraus

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_1^2 + 2x_1\Delta x + \Delta x^2 - x_1^2}{\Delta x} \qquad (5b)$$

Zusammenfassen im Zähler ergibt

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_1\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \qquad (5c)$$

Der Faktor Δx tritt in beiden Summanden des Zählers auf, folglich kann Δx gekürzt werden, man erhält:

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} 2x_1 + \Delta x \qquad (6)$$

Hier darf nun Δx den Wert 0 annehmen, womit der Grenzübergang vollzogen wird, und man erhält:

$$m_t = 2x_1 \qquad (7)$$

Die Steigung der Tangente im Punkt A hängt also vom jeweiligen Argumentwert x ab und ist genau doppelt so groß wie das Argument x an der gesuchten Stelle.

Bestimmen der vollständigen Tangentenfunktion

Eine Gerade ist vollständig bestimmt durch ihre Steigung m_t und den Y-Achsenabschnitt b_t. Die Steigung der Tangente wurde eben bereits bestimmt.

Für den Y-Achsenabschnitt verwendet man die Tatsache, dass die Tangente durch den Punkt A verlaufen muss, d.h.: an der Stelle x_1 muss die Tangente t(x) den gleichen Funktionswert wie die Funktion f(x) aufweisen:

$$t(x_1) = f(x_1) \qquad (8)$$

Die Gleichung der Tangentengeraden lautet

$$t(x) = m_t x + b_t \qquad (9)$$

Damit ergibt sich durch Einsetzen von Glg. (9) in (8):

$$m_t x_1 + b_t = f(x_1) \qquad (10)$$

Auflösen dieser Gleichung nach b_t liefert

$$b_t = f(x_1) - m_t x_1 \qquad (11)$$

Tangentengleichung t(x) für die Funktion f(x) = x²

Setzt man Glg. (7) für m_t und (4) für f(x) in Glg. (11) ein, erhält man

$$b_t = x_1^2 - 2x_1 \cdot x_1 = x_1^2 - 2x_1^2 = -x_1^2$$

Die Gleichung der gesuchten Tangente am Punkt A von f(x) lautet also

$$t_A(x) = 2x_1 \cdot x - x_1^2 \qquad (12)$$

Beispiel für eine andere Funktion für f(x)

Prinzipiell kann das umseitig vorgestellte Verfahren (Glg. 4 - 7) auch für andere Funktionen verwendet werden, allerdings werden die entsprechenden Terme dabei aufwändiger, wie das folgende Beispiel zeigt. Es sei

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 1 \qquad (13)$$

Für die Steigung m_t erhält man (vergl. Glg. 5) somit

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3(x+\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x) + 1) - (3x^2 - 2x + 1)}{\Delta x} \qquad (14)$$

(die beiden Summanden der Differenz im Nenner wurden zur besseren Übersichtlichkeit geklammert). Durch Auflösen der Quadrate und der Klammern erhält man

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 - 2x - 2\Delta x + 1 - 3x^2 + 2x - 1}{\Delta x} \qquad (15)$$

und nach Zusammenfassen

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x\Delta x + 3\Delta x^2 - 2\Delta x}{\Delta x} \qquad (16)$$

Hier lässt sich wieder Δx kürzen und man erhält

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} 6x + 3\Delta x - 2 \qquad (17)$$

Bei diesem Ausdruck kann nun der Grenzübergang vollzogen werden, da Δx nicht mehr im Nenner steht, es ergibt sich

$$m_t = 6x - 2 \qquad (18)$$

Verallgemeinerung für Funktionen der Form f(x) = axⁿ

Die Vorgehensweise ist wie oben beschrieben. Man erhält

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x+\Delta x)^n - ax^n}{\Delta x} \qquad (14a)$$

Hier kann die binomische Formel nicht mehr angewendet werden, statt dessen bestimmt man das Produkt durch summandenweise Multiplikation:

$$(x+\Delta x)^n = \binom{0}{n} x^n \Delta x^0 + \binom{1}{n} x^{n-1} \Delta x^1 + \binom{2}{n} x^{n-2} \Delta x^2 + \ldots \binom{n}{n} x^0 \Delta x^n \qquad (15)$$

die Koeffizienten bezeichnet man als *Binomialkoeffizienten*, sie ergeben sich aus dem sog. *Pascalschen Dreieck* und lassen sich berechnen nach der Formel

$$\binom{m}{n} = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!} \qquad (16)$$

wobei n! (gesprochen: „n-Fakultät") das Produkt der Zahlen 1 bis n ist: $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$. 0! ist definiert als 1.
So ist z.B.

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 \tag{17}$$

und man erhält z.B. für

$$\binom{2}{5} = \frac{5!}{(5-2)! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{(1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (1 \cdot 2)} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = \frac{20}{2} = 10 \tag{18}$$

Wendet man diese Beziehungen auf Glg. (14a) an, so erhält man den zunächst etwas unübersichtlichen Ausdruck

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} a \cdot \frac{\left(\binom{0}{n} x^n \Delta x^0 + \binom{1}{n} x^{n-1} \Delta x^1 + \binom{2}{n} x^{n-2} \Delta x^2 + \ldots \binom{n}{n} x^0 \Delta x^n \right) - \left(x^n \right)}{\Delta x} \tag{19}$$

(der gemeinsame Faktor a wurde vor den Bruch gezogen). Nun gilt aber

$$\Delta x^0 = 1 \tag{20}$$

und

$$\binom{0}{n} = \frac{n!}{(n-0)! \cdot 0!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = 1 \tag{21a}$$

sowie

$$\binom{1}{n} = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)! \cdot 1} = n \tag{21b}$$

damit vereinfacht sich (19) zu

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} a \cdot \frac{\left(1 \cdot x^n \Delta x^0 + n \cdot x^{n-1} \Delta x^1 + \binom{2}{n} x^{n-2} \Delta x^2 + \ldots \binom{n}{n} x^0 \Delta x^n \right) - \left(1 \cdot x^n \right)}{\Delta x} \tag{22}$$

Hier kann man nun im Zähler den ersten und letzten Summanden zusammenfassen (sie heben sich auf) und den verbleibenden Rest durch Δx dividieren, da Δx in allen Summanden in mindestens 1. Potenz enthalten ist. Man erhält

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} a \cdot \left(n \cdot x^{n-1} + \binom{2}{n} x^{n-2} \Delta x + \ldots \binom{n}{n} x^0 \Delta x^{n-1} \right) \tag{23}$$

Vollzieht man nun den Grenzübergang für Δx gegen 0, so fallen alle Terme weg, die Δx als Faktor enthalten. Es bleibt

$$m_t = a \cdot n \cdot x^{n-1} \tag{24}$$

Man bezeichnet die rechte Seite des Ausdrucks (24) als die 1. Ableitung der Funktion f(x) und bezeichnet diese als f'(x) (gelesen: „f-Strich von x"):

$$f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1} \tag{25}$$

Schreibweise mit Differenzialoperator
Der Ausdruck nach Glg (3) enthält sowohl im Zähler als auch im Nenner eine Differenz (zur Erinnerung: $\Delta x = x_2 - x_1$):

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{26}$$

Vollzieht man den Grenzübergang für Δx gegen 0, werden die beiden Differenzen in Zähler und Nenner beliebig klein, man bezeichnet sie dann als *Differenzial*. Um dies anzudeuten, verwendet man statt des Δ den Buchstaben d und schreibt

$$f'(x) = \frac{d\,f(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) \tag{27}$$

(gelesen: „f-Strich von x ist gleich d nach dx von f von x"). Den Quotienten

$$\frac{d}{dx}$$

bezeichnet man als *Differenzialoperator*, da er die Anweisung gibt, von der Funktion f(x) die 1. Ableitung zu bilden.

Zuammenfassung
Zur Bestimmung der Steigung m_t der Tangente an einen Punkt P(x1; $f(x_1)$) des Graphen einer Funktion f(x) bestimmt man die 1. Ableitung f'(x) der Funktion und berechnet deren Funktionswert an der Stelle x_1. Somit gilt:

$$m_t = f'(x_1)$$

Ausgangssituation (Flächenberechnung)
Gesucht ist die Fläche zwischen der X-Achse und dem Graphen einer Funktion in einem bestimmten Intervall (Abb. 2).

Lösungsweg (Flächenberechnung)
Man zerlegt die Fläche in kleine Flächensegmente, die eine Form so haben, dass man ihren Flächeninhalt einfach berechnen kann und addiert diese Flächensegmente zur Gesamtfläche.

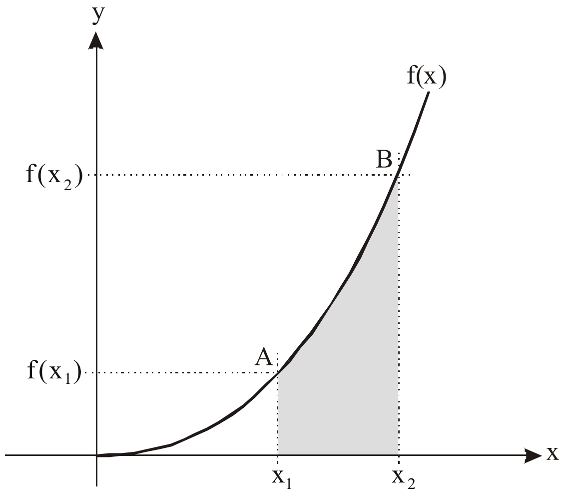

Abb. 2: Graph der Funktion $f(x) = x^2$, schraffiert ist die Fläche zwischen der X-Achse und dem Graphen im intervall $[x_1; x_2]$.

Flächeninhalt bei einer konstanten Funktion
Zunächst betrachte man den Fall, dass die zum Graphen gehörende Funktion eine konstante Funktion darstellt, also z.B. f(x) = 3. Dann ergibt sich das Bild nach Abb. 3:
Es handelt sich um die Bestimmung einer Rechtecksfläche. Ihre Höhe ist überall konstant und hat hier den Wert 3. Das hellgraue Rechteck hat die Horizontallänge x_1 (gemessen vom Ursprung), sein Flächeninhalt sei A_1.
Beide Rechtecke zusammen haben die gleiche Höhe und insgesamt die Horizontallänge x_2. Ihr gemeinsamer Flächeninhalt sei A_2.
Die dunkel schraffierte Fläche $A_{1,2}$ erhält man, wenn man vom gesamten Rechteck A_2 die Fläche des hellen Rechtecks A_1 abzieht.
Für den Flächeninhalt des dunklen Rechtecks gilt somit:

$$A_{1,2} = A_2 - A_1 \qquad (28a)$$

Für die Einzelflächen gilt:

$$A_1 = f(x_1) \cdot x_1 \qquad (28b)$$

$$A_2 = f(x_2) \cdot x_2 \qquad (28c)$$

Somit erhält man für die Gesamtfläche

$$A_{1,2} = f(x_2) \cdot x_2 - f(x_1) \cdot x_1 \qquad (29)$$

Da $f(x_1) = f(x_2)$ ist und x_2 auch ausgedrückt werden kann durch $x_2 = x_1 + \Delta x$, erhält man daraus

$$A_{1,2} = f(x_1) \cdot (x_2 - x_1) = f(x_1) \cdot (x_1 + \Delta x - x_1) = f(x_1) \cdot \Delta x \qquad (30)$$

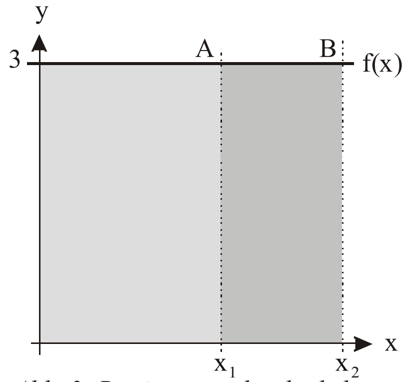

Abb. 3: Bestimmung der dunkelgrauen Fläche bei einer konstanten Funktion

Dieser trivial erscheinende Fall gibt allerdings die grundsätzliche Vorgehensweise wieder.

Flächeninhalt bei einer proportionalen Funktion
Nun betrachte man die Funktion f(x) = k · x, deren Graph eine Ursprungsgerade mit der Steigung k darstellt.
Die Bezeichnung der Flächen sei wie oben - auch hier erhält man die dunkelgraue Fläche durch Subtraktion der hellgrauen von der gesamten Dreiecksfläche. Nach der bekannten Regel für Dreiecke gilt hier jedoch

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot f(x_1) \cdot x_1 \qquad (31a)$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot f(x_2) \cdot x_2 \qquad (31b)$$

und somit für die Gesamtfläche

$$A_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot f(x_2) \cdot x_2 - \frac{1}{2} \cdot f(x_1) \cdot x_1 \qquad (32)$$

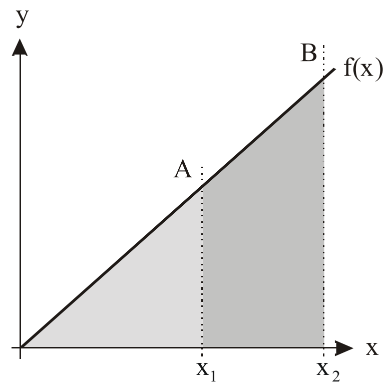

Abb. 4: Bestimmung der dunkelgrauen Fläche bei einer proportionalen Funktion

Anders als im letzten Beispiel sind hier die Funktionswerte $f(x_1)$ und $f(x_2)$ nicht mehr gleich und können somit auch nicht ausgeklammert werden. Lediglich die Differenz der X-Werte kann hier zur Anwendung gebracht werden und man erhält

$$A_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot \left(f(x_1 + \Delta x) \cdot (x_1 + \Delta x) - f(x_1) \cdot x_1 \right) \qquad (33)$$

Einsetzen der bekannten Funktion f(x) = k · x ergibt somit

$$A_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot \left(k \cdot (x_1 + \Delta x) \cdot (x_1 + \Delta x) - k \cdot x_1 \cdot x_1 \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(k \cdot x_1^2 + 2k \cdot x_1 \Delta x + k \cdot \Delta x^2 - k \cdot x_1^2 \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(2k \cdot x_1 \Delta x + k \cdot \Delta x^2 \right)$$

Die Fläche nimmt also mit Δx quadratisch zu.

Interessant ist hier noch der Sonderfall, dass $x_1 = 0$ ist, also die gesamte Fläche vom Ursprung aus berechnet wird. Denn dann vereinfacht sich die Gleichung zu

$$A_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta x^2 \qquad (34a)$$

wobei $\Delta x = x_2$ ist, also erhält man

$$A_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_2^2 \qquad (34b)$$

Auch hier stellt man fest, dass die Fläche quadratisch mit dem Argument x zunimmt. Stellt man den Flächeninhalt als Funktion von x dar, erhält man

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \qquad (35)$$

also eine quadratische Funktion, deren Graph folglich eine Parabel ist. Wendet man die Ableitungsregel nach Glg. (25) auf diese Funktion an, so erhält man

$$\frac{d}{dx} F(x) = F'(x) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot 2 \cdot x^{2-1} = k \cdot x \qquad (36)$$

Die 1. Ableitung der Flächenfunktion ergibt also die Funktion f(x), deren Graph die Fläche nach oben beschränkt. Dieser Umstand ist für die Verallgemeinerung auf beliebige Funktionen, deren Graph die Fläche begrenzt, wichtig.

Flächeninhalt bei beliebigen Funktionen

Eine Möglichkeit der Flächenbestimmung besteht in der Zerlegung der gesuchten Fläche in Teilflächen, deren Flächeninhalt durch ein Rechteck angenähert wird. Die Summe aller rechteckinhalte ergibt dann einen Näherungswert für den gesuchten Flächeninhalt. Wie man leicht der Abb. 5 entnehmen kann, wird diese Annäherung umso genauer, je größer die Anzahl der Rechtecke gewählt wird.

Zur näheren Untersuchung denke man sich die Strecke vom Ursprung bis x_1 in eine Anzahl n gleichlanger Intervalle der Länge Δx geteilt. Dann gilt für den Flächeninhalt des Rechtecks an der Stelle x_i

$$A_i = f(x_i) \cdot \Delta x \qquad (37)$$

und für die gesamte Fläche

$$A_{ges} = f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + f(x_3) \cdot \Delta x + ... + f(x_n) \cdot \Delta x \qquad (38)$$

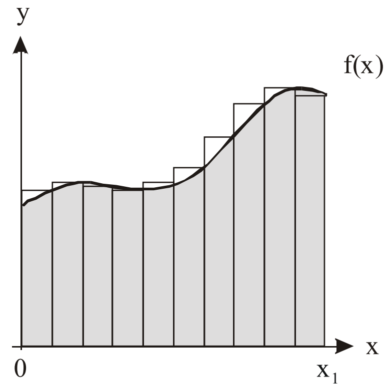

Abb. 5: Bestimmung der grauen Fläche bei einer beliebigen Funktion

Für eine solche Art der Summe kennt die Mathematik die abkürzende Schreibweise

$$A_{ges} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x \qquad (39)$$

(gelesen: „A-gesamt ist die Summe über i gleich 1 bis n von f von x-i mal Delta-x“).

Wie schon erwähnt erhält man auch hier eine umso bessere Näherung, je größer die Anzahl der Rechtecke ist, was gleichbedeutend ist mit der Aussage, dass Δx beliebig klein gewählt werden müsste. Den tatsächlichen Flächeninhalt erhielte man also durch den Grenzwert

$$A_{ges} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x \qquad (40a)$$

bzw.

$$A_{ges} = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x \qquad (40b)$$

Auch hier gibt es eine Operatorschreibweise, die angibt, dass der Grenzübergang vollzogen wurde:

$$A_{ges} = \int f(x) \cdot dx \qquad (41)$$

(gelesen: „Integral von f von x [nach] dx“), wobei das geschwungene stilisierte S an das griechische Σ (Buchstabe S) des Summenzeichens erinneren soll. Wie oben bereits festgestellt, muss die Flächenfunktion als Ableitung die Funktion des Graphen ergeben, es muss also die Funktion:

$$F(x) = \int f(x) \cdot dx \qquad (42)$$

so bestimmt werden, dass gilt:

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x) \qquad (43)$$

Dies ist genau der umgekehrte Weg wie bei der Ableitung einer Funktion, deswegen wird hier häufig der Begriff *Aufleitung* verwendet.

Regeln zum Ab- und Aufleiten
Gleichung (25) enthält die Ableitungsregel für einen Ausdruck der Form

$$\boxed{f(x) = k \cdot x^n \Rightarrow f'(x) = k \cdot n \cdot x^{n-1} \qquad \textbf{(Ableitungsregel für Potenzen)}}$$

in Worten ausgedrückt:

> *man erhält die Ableitungsfunktion, indem man den konstanten Faktor k beibehält, den Exponenten der Variablen als weiteren Faktor vor die Variable stellt und den Exponenten der Variablen um 1 erniedrigt.*

Zur Aufleitung kehrt man diese Regel um und führt die Anweisungen in umgekehrter Reihenfolge aus:

> *man erhält die Aufleitungsfunktion, indem man den Exponenten der Variablen um 1 erhöht, den Term durch den neuen Exponenten dividiert und den konstanten Faktor beibehält*

in mathematischer Symbolik also

$$\boxed{f(x) = k \cdot x^n \Rightarrow F(x) == k \cdot \frac{1}{n+1} x^{n+1} \qquad \textbf{(Aufleitungsregel für Potenzen)}}$$

(Genaugenommen fehlt hier noch ein konstanter Summand, der beim Differenzieren wieder wegfallen würde - dies ist aber hier für die Flächenberechnung nicht relevant)

Die Integralfunktion F(x) der proportionalen Funktion f(x) = k · x ergibt sich somit zu

$$f(x) = k \cdot x^1 \Rightarrow F(x) == k \cdot \frac{1}{1+1} x^{1+1} = k \cdot \frac{1}{2} x^2$$

damit erhält man also den gleichen Ausdruck wie auf Seite 5, Glg. (35) für den Flächeninhalt.

Sowohl beim Ab- als auch beim Aufleiten gilt die Summenregel:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x) & \textbf{(Summenregel beim Ableiten)} \\ \int \left(f(x) + g(x)\right) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx & \textbf{(Summenregel beim Integrieren)} \end{array}}$$

Bestimmung des Flächeninhaltes zwischen zwei X-Werten
Um eine Teilfläche A_{ges} (dunkelgraue Fläche in Abb. 6) in einem Intervall [x1; x2] zu bestimmen, geht man nun wie bereits auf Seite 4 beschrieben vor: Man berechnet zunächst die Fläche A_2 (linierte Fläche) bis zur oberen Intervallgrenze x_2 und zieht anschließend davon den Flächeninhalt A_1 (hellgraue Fläche) bis zur unteren Intervallgrenze x_1 wieder ab:

$$A_{ges} = A_2 - A_1 \qquad (44)$$

In der Integralschreibweise stellt sich dieses dar als

$$A_{ges} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \qquad (45)$$

wobei unten am Integralzeichen die Untergrenze und oben die Obergrenze angegeben wird. Nach Bestimmen der Integralfunktion F(x) erhält man daraus den Flächeninhalt zu

$$A_{ges} = \left[F(x)\right]_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_2) \qquad (46)$$

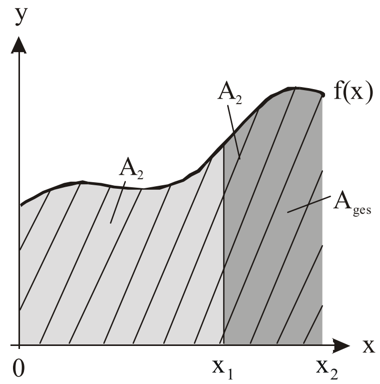

Abb. 6: Bestimmung der Teilfläche bei einer beliebigen Funktion

(der erste Term hinter dem Gleichheitszeichen wird gelesen als „F von x in den Grenzen von x-1 bis x-2“).

Beispiel für f(x) = x² + 2x -1
Gesucht ist der Flächeninhalt zwischen der Kurve und der X-Achse im Intervall [2; 3], d.h.: $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$.
Für die gesuchte Fläche gilt dann

$$A_{ges} = \int_2^3 (x^2 + 2x - 1)dx \qquad (47)$$

Anwenden der Aufleitungsregeln ergibt für F(x) den Term

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 - 1 \cdot x = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x \qquad (48)$$

Der Flächeninhalt ist dann

$$A_{ges} = \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x\right]_2^3 = \left(\frac{1}{3}3^3 + 3^2 - 3\right) - \left(\frac{1}{3}2^3 + 2^2 - 2\right) = 15 - \frac{14}{3} = \frac{31}{3} = 10\frac{1}{3}$$

Handelt es sich bei den Koordinatenachsen um einheitenbehaftete Größen, ist die Maßeinheit dieses „Flächeninhaltes“ das Produkt dieser Einheiten.

Weitere Ableitungsregeln

Potenzen mit nicht natürlichen Exponenten

Die Ableitungsregel für Polynome mit ganzzahligen positiven Exponenten

$$x^n \xrightarrow[\text{Ableitung}]{} n \cdot x^{n-1} \qquad n \in N \tag{49}$$

lässt sich auch erweitern auf negative Exponenten:

$$x^z \xrightarrow[\text{Ableitung}]{} z \cdot x^{z-1} \qquad z \in Z \tag{50}$$

so ist z.B. die Ableitung von $f(x) = x^{-1}$

$$f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x} \xrightarrow[\text{Ableitung}]{} f'(x) = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

Die Erweiterung der Ableitungsregel von N auf Z legt nahe, dies auch für Exponenten der Form

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}}$$

anzuwenden. Durch Anwenden der Regel für Potenzen erhält man daraus

$$x^{\frac{m}{n}} \xrightarrow[\text{Ableitung}]{} \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} = \frac{m}{n} x^{\frac{m-n}{n}} \tag{51}$$

So erhält man z.B. für

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \xrightarrow[\text{Ableitung}]{} \frac{1}{2} x^{\frac{1-2}{2}} = \frac{1}{2} x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \tag{52}$$

Produkte von Funktionen

Für das Produkt zweier Funktionen gilt

$$\boxed{\big(f(x) \cdot g(x)\big)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \qquad \textbf{(Produktregel)} \qquad (u \cdot v)' = vu' + uv'} \tag{53}$$

hier auch in der häufig verwendeten verkürzten Schreibweise mit u = f(x) und v = g(x) angegeben.

So gilt zum Beispiel für die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^3$

$$\left(x^2 \cdot x^3\right) \xrightarrow[\text{Ableitung}]{} 2x \cdot x^3 + x^2 \cdot 3x^2 = 2x^4 + 3x^4 = 5x^4 \tag{54a}$$

Da gilt:

$$x^2 \cdot x^3 = x^5 \tag{54b}$$

kann man dieses Ergebnis auch durch die Ableitung des ausgeführten Produktes überprüfen, es ergibt sich als Ableitung ebenfalls

$$x^5 \xrightarrow[\text{Ableitung}]{} 5x^4 \tag{55}$$

Quotienten von Funktionen

Für den Quotienten zweier Funktionen gilt die etwas kompliziertere Regel

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} \qquad \textbf{(Quotientenregel)} \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}} \tag{56}$$

auch hier in der verkürzten Schreibweise angegeben.

So gilt für als Beispiel für die beiden obigen Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^3$

$$\left(\frac{x^2}{x^3}\right) \xrightarrow[\text{Ableitung}]{} \frac{x^3 \cdot 2x - x^2 \cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{2x^4 - 3x^4}{x^6} = \frac{-x^4}{x^6} = -\frac{1}{x^2} \tag{57a}$$

da man hier den Quotienten auch vorab bilden kann, erhält man zur Probe

$$\frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x} = x^{-1} \xrightarrow[\text{Ableitung}]{} -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \tag{57b}$$

Funktionen von Funktionen

Als Verkettung von Funktionen bezeichnet man die Tatsache, dass das Argument der ersten Funktion selbst wieder eine Funktion ist:

$$f(g(x)) = f(z) \qquad \text{mit} \qquad z = g(x) \tag{58}$$

Man bezeichnet dabei f(z) als *äußere Funktion* und g(x) als *innere Funktion*, f(g(x)) als *Verkettung* von f und g.

Für die Ableitung einer solchen Funktion gilt

$$\boxed{f(g(x))' = g'(x) \cdot f'(g(x)) \quad \textbf{(Kettenregel)} \quad u(v)' = u' \cdot v'} \qquad \textbf{(59)}$$

dabei bezeichnet man g'(x) als innere Ableitung und f'(z) = f'(g(x)) als äußere Ableitung.

Die Vorgehensweise soll am folgenden Beispiel verdeutlicht werden. Es sei

$$f(x) = \left(x^3 - 2x\right)^2 \qquad (60)$$

Hier ist

$$f(z) = z^2 \qquad (61)$$

die äußere Funktion und

$$g(x) = x^3 - 2x = z \qquad (62)$$

die innere Funktion.
Zunächste wird die innere Ableitung von g(x) gebildet:

$$x^3 - 2x \xrightarrow[\text{Ableitung}]{} 3x^2 - 2 \qquad (63)$$

Als nächstes bildet man die äußere Ableitung von f(z)

$$z^2 \xrightarrow[\text{Ableitung}]{} 2z \qquad (64)$$

Damit ergibt sich als Ableitung von f(g(x))

$$\left(x^3 - 2x\right)^2 \xrightarrow[\text{Ableitung}]{} \left(3x^2 - 2\right) \cdot 2z = \left(3x^2 - 2\right) \cdot 2\left(x^3 - 2x\right) \qquad (65)$$

also

$$f(g(x))' = \left(3x^2 - 2\right) \cdot 2\left(x^3 - 2x\right) \qquad (66)$$

Auch hier kann man die Probe machen, indem man den Term von f(x) nach der binomischen Formel auflöst und unter Anwendung der Summenregel (siehe S. 6) ableitet:

$$f(g(x)) = x^6 - 4x^4 + 4x^2 \xrightarrow[\text{Ableitung}]{} f(g(x))' = 36x^3 - 36x^2 \qquad (67)$$

Ausmultiplizieren von Glg. (66) ergibt

$$f(g(x))' = 6x^5 - 4x^3 - 12x^3 + 8x = 6x^5 - 16x^3 + 8x \qquad (68)$$

stimmt also mit dem Ergebnis von Glg. (67) überein.

Als zweites Beispiel soll eine Funktion dienen, die eine Potenz in einer Wurzel enthält:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - a^2} \quad \text{mit} \quad a \in R \qquad (69)$$

Hier ist

$$f(z) = \sqrt{z} \quad \text{und} \quad g(x) = x^2 - a^2 \qquad (70)$$

mit den Ableitungen

$$f'(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}} \quad \text{und} \quad g'(x) = 2x \qquad (71)$$

Damit erhält man für die Ableitung von f(x)

$$f'(x) = 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \qquad (z = g(x) = x^2 - a^2) \qquad (72)$$

Zusammenstellung der am häufigsten benötigten Ableitungen

Funktion	Ableitung	Funktion	Ableitung
c (Konstante)	0	sin x	cos x
x	1	cos x	- sin x
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	e^x	e^x
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$
a^x	$a^x \cdot \ln a$	ln x	$\frac{1}{x}$

Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Betrachtet wird der senkrechte Wurf aus einer Starthöhe s_0 im Schwerefeld der Erde mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0. Die Bewegungsgleichung dafür lautet

$$s(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0 \qquad (73)$$

darin ist s der Ort in Abhängigkeit von der Zeit t und g die Fallbeschleunigung.
Zunächst steigt der Wurfkörper an, dabei nimmt seine Geschwindigkeit wegen der entgegengesetzt gerichteten Erdbeschleunigung ab, bis sie den Wert 0 erreicht und der Körper seine maximale Steighöhe erreicht hat. Anschließend beginnt er mit steigender Geschwindigkeit zu fallen, bis er die Höhe 0 erreicht und auf dem Boden aufkommt.
Der Graph der Höhe s in Abhängigkeit von der Zeit t ist eine nach unten geöffnete asymmetrische Parabel (s. Abb. 7).

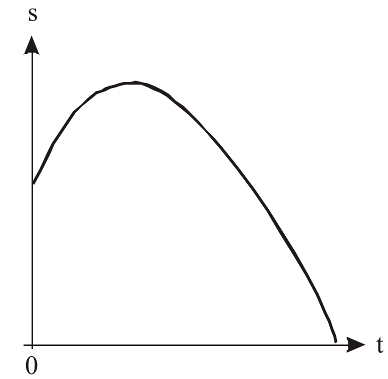

Abb. 7: Flughöhe s eines geworfenen Körpers in Abhängigkeit von der Zeit t

Für die Geschwindigkeit gilt üblicherweise

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad (74)$$

dazu muss das Zeitintervall Δt bestimmt werden, das für das Durchlaufen einer bestimmten Strecke Δt benötigt wird. Da aber die Zeit pro Wegeinheit sich laufend ändert, erhält man eine genaue Aussage über die Geschwindigkeit nur, wenn man das Zeitintervall beliebig klein wählt, also

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad (75)$$

Nach den Ausführungen auf S. 1ff ist der Grenzwert dieses Termes aber die 1. Ableitung des Weges s(t) nach der Zeit, also gilt:

$$v(t) = \frac{d}{dt} s(t) \qquad (76)$$

Die Momentangeschwindigkeit ergibt sich also aus der 1. Ableitung der Funktionn des Weges nach der Zeit unter Anwendung der Summenregel zu

$$v(t) = -g \cdot t + v_0 \qquad (77)$$

Dies ist eine Gerade mit dem Y-Achsenabschnitt v_0 und der Steigung -g (siehe auch Abb. 8).

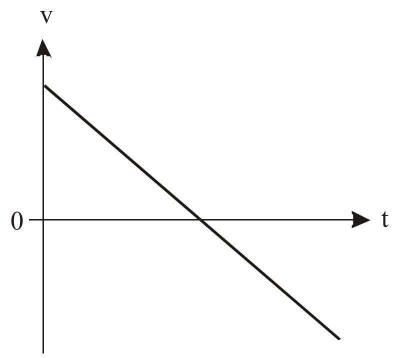

Abb. 8: Geschwindigkeit eines geworfenen Körpers in Abhängigkeit von der Zeit t

Analog definiert sich die Beschleunigung eines Körpers als die Änderung der Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit, es gilt

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad (78)$$

Auch hier erhält man durch genaue Aussagen erst bei beliebig kleinen Intervallen Δt

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad (79)$$

und der Grenzübergang liefert

$$a(t) = \frac{d}{dt} v(t) \qquad (80)$$

Anwenden der Differeneziationsregeln liefert daraus

$$a(t) = -g \qquad (81)$$

das heißt, die Beschleunigung ist konstant und gleich minus g (Ausgangsvoraussetzung).

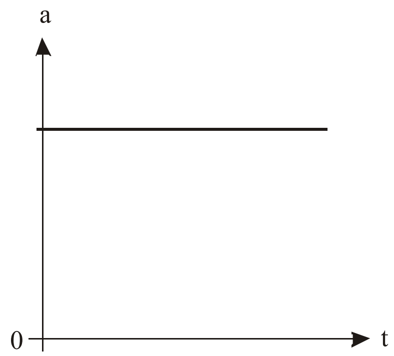

Abb. 9: Beschleunigung eines geworfenen Körpers in Abhängigkeit von der Zeit t

Betrachte man Glg. (80) und ((77), so stellt man fest, dass die Beschleunigung die Ableitung von der Ableitung des Ortes s(t) ist, man sagt auch: a(t) ist die zweite Ableitung des Ortes (nach der Zeit). In Operatorschreibweise ergibt sich

$$a(t) = \frac{d}{dt} v(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} s(t)\right) \qquad (82)$$

Die beiden gleichartigen Operatoren lassen sich zusammenfassen zu

$$a(t) = \frac{d^2}{dt^2} s(t) \qquad (83)$$

(gesprochen: „a von t ist gleich d-Quadrat nach dt-Quadrat von s von t“). Dieser Operator gibt also an, dass die 2. Ableitung von s(t) zu bilden ist. Entsprechendes gilt für höhere Ableitungen (was in der Physik allerdings eher selten ist).

Energie eines geladenen Kondensators
Ein Kondensator ist eine Bauelement, das eine bestimmte Ladung speichern kann, deren Größe von der Kapazität C des Kondensators und der an ihn angelegten Spannugung U abhängt. Für die Kapazität gilt die Definition

$$C = \frac{Q}{U} \tag{84}$$

Die in einem Kondensator gespeicherte Energie ergibt sich aus der Spannungsdefinition

$$U = \frac{W}{Q} \tag{85}$$

zu

$$W = U \cdot Q \tag{86}$$

Ändert sich die Spannung an einem Kondensator, so ändert sich auch die Ladungsmenge Q auf dem Kondensator. Da die Gleichung (86) nur gilt, wenn U und Q konstant sind, muss man die Energie schrittweise bestimmen, denn die Ladung steigt proportional mit der Spannung. Es gilt also:

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} Q_i \cdot \Delta U \tag{87}$$

Aus Glg. (84) folgt für die Ladung auf dem Kondensator

$$Q = C \cdot U \tag{88}$$

Analog zu den Glg. (40) und (41) gilt hier also entsprechend

$$W = \int_0^{U_{max}} (C \cdot U)\,dU \tag{89}$$

wobei die Spannung U bei 0 beginnt und bis U_{max} ansteigt. Die unabhängige Variable ist in diesem Fall U, somit ergibt sich durch Anwendung der Integrationsregel (Aufleitungsregel für Potenzen, S. 6)

$$W = C \cdot \left[\frac{1}{2}U^2\right]_0^{U_{max}} = \frac{1}{2} C \cdot U_{max}^2 \tag{90}$$

Hubarbeit bei abnehmender Gravitationsfeldstärke
Bei geringen Hubhöhen kann man die Erdbeschleunigung als konstant ansehen (a = g = const). Bei größeren Strecken nimmt die Gravitationsfeldstärke jedoch quadratisch mit dem Abstand ab, es gilt:

$$G(h) = \gamma \cdot \frac{M}{r^2} \tag{91}$$

wobei g die Gravitationskonstante, M die Masse des Zentralkörpers und r der Abstand vom Mittelpunkt der Masse M ist Um eine Masse m im Gravitationsfeld der Stärke g um die Höhe h anzuheben, gilt im Laborsystem für die Hubarbeit W

$$W = m \cdot g \cdot h \tag{92}$$

wobei allerdings g als konstant angesehen werden muss. Ist dies wie hier nicht der Fall, so muss wieder die Summe aller Teilenergien gebildet werden, indem man die Energie von der Anfangshöhe h_0 bis zur Höhe $h_0+\Delta h$, von dort bis zur Höhe $h_0+2\Delta h$ usw. addiert und G(h) für jedes Intervall neu berechnet. Man erhält wieder

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m \cdot G(h) \cdot \Delta h \tag{93}$$

und als Grenzwert

$$W = \int_{h_0}^{h_1} (m \cdot G(h))\,dh \tag{94}$$

Einsetzen der Glg. (91) in (94) ergibt das Integral

$$W = \int_{h_0}^{h_1} (m \cdot \gamma \cdot \frac{M}{h^2})\,dh = m \cdot \gamma \cdot M \cdot \int_{h_0}^{h_1} \frac{1}{h^2}\,dh \tag{95}$$

mit der unabhängigen Variablen h, wobei die Konstanten vor das Integralzeichen gezogen werden können. Als Lösung ergibt sich daraus nach den entsprechenden Regeln

$$W = m \cdot \gamma \cdot M \cdot \left[-\frac{1}{h}\right]_{h_0}^{h_1} = -m \cdot \gamma \cdot M \cdot \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_0}\right) = m \cdot \gamma \cdot M \cdot \left(\frac{1}{h_0} - \frac{1}{h_1}\right) \tag{96}$$

Das negative Vorzeichen gibt an, dass die Energie mit zunehmender Höhe abnimmt, was im Umkehrschluss heißt, dass ein fallender Körper an Energie zunimmt, was ja auch der üblichen Beobachtung entspricht. Man beachte, dass h_0 in diesem Fall den Wert 0 nicht annehmen darf, da dann der Ausdruck nicht mehr definiert ist. Für kleine Δh geht (96) in (92) über, wie man durch Ersetzen von h_1 durch $h_0 + \Delta h$ leicht nachweisen kann (Hauptnenner bilden!).

Inhaltsverzeichnis